Avantajele rezolvărilor algebrice asupra celor cu rezultate numerice intermediare

Vlad Timofte
Institutul de Matematică al Academiei Române

Acest material conţine sugestii vizând îmbunătăţirea baremelor de corectare de la toate fazele Olimpiadei Naţionale de Fizică. Argumentele expuse sunt de ordin strict ştiinţific. Mai întâi, ca exemplu este prezentată o problemă de elasticitate la nivelul clasei a VI-a, cu două rezolvări corecte care prezintă multe asemănări, dar şi câteva deosebiri esenţiale. Aceste rezolvări sunt apoi comentate din punct de vedere al valorii lor ştiinţifice. Deşi din motive obiective rezolvările de tip algebric au o valoare mai ridicată, în prezent baremele de corectare folosite cu ocazia Olimpiadelor de Fizică le depunctează (cel puţin la clasa a VI-a), din cauza absenţei unor rezultate numerice intermediare, necerute în enunţurile problemelor. În acest material arătăm de ce rezolvările prin calcul algebric (fără rezultate numerice intermediare) urmat de finalizare numerică sunt de preferat şi în niciun caz de depunctat.

1. Exemplu justificator: o problemă de elasticitate

Problemă. *Dintr-un resort omogen cu constanta elastică* $k = 100\,\mathrm{N/m}$ *şi lungimea* $l = 10\,\mathrm{cm}$*, se taie o bucată, obţinându-se astfel un nou resort mai scurt, de lungime* $l_0 = 8\,\mathrm{cm}$*. Să se determine constanta elastică a noului resort.*

Rezolvare de tip I (cu rezultate numerice intermediare).
Fixăm resortul iniţial (netăiat) la unul dintre capete, iar la celălalt capăt acţionăm pe direcţia resortului cu o forţă $F = 10\,\mathrm{N}$. Această forţă produce deformaţia elastică

$$\Delta l = \frac{F}{k} = \frac{10\,\mathrm{N}}{100\,\mathrm{N/m}} = 0,1\,\mathrm{m}.$$

Datorită omogenităţii, porţiuni de diferite lungimi ale resortului suferă deformaţii proporţionale cu lungimile lor. Astfel, cele două porţiuni de lungimi iniţiale $l_0 = 0,08\,\mathrm{m}$ şi $l_1 := l - l_0 = 0,02\,\mathrm{m}$ suferă deformaţiile Δl_0 şi Δl_1, proporţionale cu l_0 şi l_1. Avem

$$\Delta l_0 + \Delta l_1 = \Delta l = 0,1\,\mathrm{m},$$

$$\frac{\Delta l_0}{0,08\,\mathrm{m}} = \frac{\Delta l_1}{0,02\,\mathrm{m}} = \frac{\Delta l_0 + \Delta l_1}{0,08\,\mathrm{m} + 0,02\,\mathrm{m}} = \frac{0,1\,\mathrm{m}}{0,1\,\mathrm{m}} = 1$$

(am folosit şi proprietatea unui şir de rapoarte egale: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$). Astfel, obţinem

$$\Delta l_0 = 0,08\,\mathrm{m}.$$

Constanta elastică k_0 a resortului de lungime $l_0 = 8\,\mathrm{cm}$ este

$$k_0 = \frac{F}{\Delta l_0} = \frac{10\,\mathrm{N}}{0,08\,\mathrm{m}} = 125\,\mathrm{N/m}.$$

Rezolvare de tip II (calcul algebric, urmat de finalizare numerică).
Fixăm resortul iniţial (netăiat) la unul dintre capete, iar la celălalt capăt acţionăm pe direcţia resortului cu o forţă $\vec{F}$. Această forţă produce deformaţia elastică

$$\Delta l = \frac{F}{k}.$$

Datorită omogenităţii, porţiuni de diferite lungimi ale resortului suferă deformaţii proporţionale cu lungimile lor. Astfel, cele două porţiuni de lungimi iniţiale l_0 şi $l_1 := l - l_0$ suferă deformaţiile Δl_0 şi Δl_1, proporţionale cu l_0 şi l_1. Avem

$$\Delta l_0 + \Delta l_1 = \Delta l,$$

$$\frac{\Delta l_0}{l_0} = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_0 + \Delta l_1}{l_0 + l_1} = \frac{\Delta l}{l}$$

(am folosit şi proprietatea unui şir de rapoarte egale: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$). Astfel, obţinem succesiv

$$\Delta l_0 = \frac{l_0 \Delta l}{l},$$

$$\frac{F}{\Delta l_0} = \frac{F}{\Delta l} \cdot \frac{l}{l_0} = \frac{kl}{l_0}.$$

Cum raportul $\dfrac{F}{\Delta l_0}$ dintre forţa deformatoare F şi deformaţia Δl_0 a bucăţii de lungime l_0 este constant (nu depinde de mărimea forţei F), deducem că această bucată se comportă ca un resort cu constanta elastică

$$k_0 = \frac{kl}{l_0} = \frac{100\,\mathrm{N/m} \cdot 0,1\,\mathrm{m}}{0,08\,\mathrm{m}} = 125\,\mathrm{N/m}.$$

Notă. În cazul aceleiaşi probleme pentru o bară elastică, se poate da şi o rezolvare pe baza legii lui Hooke; în expresia acesteia intervine şi aria secţiunii barei, care pe parcursul unei rezolvări de tip II se simplifică şi nu mai apare în expresia algebrică finală a lui k_0. În cazul unui resort însă, noţiunea de "arie a secţiunii" devine ambiguă şi e preferabil să fie evitată.

2. Consideraţii teoretice generale asupra rezolvărilor de tip I şi II

Rezolvările de ambele tipuri sunt corecte şi pot fi apreciate cu punctajul maxim, însă, din punct de vedere ştiinţific rezolvările de tip II sunt preferabile, din următoarele motive:

1. Rezolvările de tip II permit sesizarea unor aspecte sau interpretări teoretice interesante. În exemplul prezentat, din ultimul rând al rezolvării putem desprinde egalitatea $k_0 l_0 = kl$. Aceasta ne arată că dacă dintr-un resort tăiem mai multe resorturi mai mici, atunci pentru fiecare dintre acestea, produsul dintre constanta elastică şi lungime este acelaşi. O astfel de concluzie generală nu poate fi obţinută printr-o rezolvare de tip I.
   În plus, în rezolvarea de tip II comportarea elastică a bucăţii tăiate se demonstrează (se arată că raportul $\frac{F}{\Delta l_0}$ nu depinde de F), nu se presupune apriori, ca în cealaltă rezolvare.
   De asemenea, pentru formarea în timp a unei intuiţii corecte a fenomenelor fizice, este utilă obişnuinţa de a obţine formule algebrice (şi nu doar numere), care arată clar cum depinde rezultatul final de datele iniţiale. De exemplu, într-o problemă sau situaţie teoretică dată, s-ar putea remarca faptul că o anumită interacţiune depinde invers proporţional de pătratul distanţei, că anumite mărimi au o influenţă redusă asupra rezultatului final şi ar putea fi neglijate în anumite condiţii, etc.
2. În rezolvările de tip I, rotunjirea rezultatelor numerice intermediare (la un număr de zecimale) conduce la propagarea şi amplificarea erorilor prin calculele ulterioare. În rezolvările de tip II, rotunjirea se face abia la sfârşitul calculelor, conducând la un rezultat numeric mai exact. În plus, de foarte multe ori, anumite valori se simplifică/reduc, astfel încât introducerea lor în calculul numeric final se face doar în măsura în care este necesar. De exemplu, în rezolvarea de tip II prezentată, mărimea (modulul) forţei $\vec{F}$ nu intervine în calculul numeric final.
3. În rezolvările de tip II, formula algebrică finală permite evaluarea erorilor şi oferă un răspuns la întrebarea extrem de importantă din punct de vedere practic: "*Cât de exact trebuie*

măsurate datele iniţiale, pentru a obţine un rezultat final suficient de apropiat (cu eroare maximă dată, de exemplu $\varepsilon = 10^{-3}$) de valoarea necunoscută reală?".
Aceasta se poate face folosind inegalităţi de tip Lagrange (creşteri finite). Mai precis, dacă valoarea necunoscută y a unei o mărimi fizice (scalare sau vectoriale) trebuie determinată cu o eroare maximă dată $\varepsilon > 0$ din valorile $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$ ale altor mărimi măsurabile, o rezolvare de tip II conduce întotdeauna la o formulă algebrică finală

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x).$$

În practică, în locul valorii exacte x (şi aceasta tot necunoscută), prin măsurare găsim o aproximare $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a \approx x$. Cu formula algebrică, în locul valorii exacte y găsim prin calcul numeric valoarea

$$b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a) \approx f(x) = y.$$

Dacă măsurarea lui x se face cu eroarea maximă δ (adică $\|x - a\| \leq \delta$), atunci cu Teorema lui Lagrange pentru funcţii vectoriale diferenţiabile[1], putem evalua eroarea $\|y - b\|$ prin

$$\|y - b\| = \|f(x) - f(a)\| \leq \|x - a\| \cdot \sup_{\xi \in [a,x]} \|f'(\xi)\| \leq \delta \cdot \sup_{\|\xi - a\| \leq \delta} \|f'(\xi)\|$$

(în plus, putem alege normele convenabile). Deci pentru a determina y cu eroarea maximă dată ε (adică $\|y - b\| \leq \varepsilon$), este suficient să găsim $\delta > 0$ suficient de mic, astfel încât

$$\delta \cdot \sup_{\|\xi - a\| \leq \delta} \|f'(\xi)\| \leq \varepsilon.$$

Astfel se poate găsi o valoare numerică a lui δ, indicând apriori (înaintea măsurării sau a experimentului) cât de exact trebuie măsurat x, pentru a calcula y cu eroarea maximă dată. Detaliile de mai sus sunt destul de tehnice, dar ideea fundamentală este următoarea: *pentru determinarea prin calcul numeric a unei mărimi fizice cu o eroare maximă dată, este necesară o formulă algebrică exprimând acea mărime fizică în funcţie de datele iniţiale măsurabile.*

Cele de mai sus subliniază, dacă mai era nevoie, unele dintre multiplele şi covârşitoarele avantaje ale rezolvărilor de tip algebric asupra celorlalte.

3. Comentarii asupra Olimpiadei Judeţene de Fizică 2014

La OJF 2014, corectarea s-a făcut după bareme concepute pentru rezolvări de tip I. Absenţa unor rezultate numerice intermediare a fost depunctată (de obicei cu 0,25 p. pentru fiecare lipsă), deşi acestea nu erau cerute în enunţul problemei, iar formulele algebrice corespunzătoare erau prezente. Astfel, rezolvărilor de tip II li s-au acordat punctaje sensibil mai mici decât celor de tip I, iar diferenţa putea ajunge chiar la câteva puncte. Obiecţiilor formulate cu ocazia contestaţiilor li s-a opus răspunsul: *"Aşa este baremul"*. Acesta este motivul apariţiei prezentului material.

4. Concluzie/sugestie

Ar fi de dorit ca pe viitor (inclusiv cu ocazia Olimpiadei Naţionale de Fizică 2014) să nu fie descurajată elaborarea unor rezolvări de tip II, dat fiind că din punct de vedere ştiinţific, acestea sunt în mod clar superioare altor rezolvări. Atât rezolvările de tip I, cât şi cele de tip II, ar putea fi apreciate cu punctajul maxim, dacă ele sunt corect şi complet argumentate. Absenţa unor rezultate numerice intermediare nu ar trebui depunctată, dacă acestea nu sunt cerute în enunţul problemei şi dacă un rezultat final corect este obţinut pe baza unei formule algebrice corecte.

Aplicarea punctului de vedere expus în acest material nu poate decât să contribuie la îmbunătăţirea baremelor de corectare folosite cu ocazia diverselor faze ale Olimpiadei Naţionale de Fizică.

[1] Varianta scalară a teoremei furnizează o egalitate de tipul $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, cu $\xi \in (a, x)$.