TEST DE EVALUARE ÎN MATEMATICA
desfasurat sub coordonarea prof. Constantin NĂSTĂSESCU, membru corespondent al ACADEMIEI ROMÂNE

17 . 11 . 2007

Clasa a XI -a

NOTĂ. **Toate subiectele sunt obligatorii. La subiectul I există un singur răspuns corect .La subiectul II se va da direct răspunsul.La subiectele III si IV se cer rezolvările complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 2 ore şi 30 de minute**

SUBIECTUL I (20p)
(Se scrie pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -7 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(4p) **1)** Suma elementelor matricei A^3 este

a) 2 **b)** 10 **c)** -2 **d)** 0

(4p) **2)** Cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $A^n = I_2$, este

a) 2 **b)** 6 **c)** 4 **d)** 3

(4p) **3)** Matricea $I_2 + A + ... + A^5$ este

a) O_2 **b)** I_2 **c)** A **d)** A^2

(4p) **4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$ este

a) 0 **b)** 1 **c)** ∞ **d)** 0,5

(4p) **5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ este

a) 0 **b)** 1 **c)** ∞ **d)** 0,5

SUBIECTUL II (40p)
(Se scriu pe foaia de concurs doar numărul exerciţiului şi rezultatul corespunzător)

(4p) **1)** Cât este suma matricelor $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$?

(4p) **2)** Cât este produsul matricelor $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$?

(4p) **3)** Să se scrie două matrice $A,B\in M_2(\mathbf{C})$, $A,B\neq O_2$, astfel încât $A\cdot B = O_2$.

(4p) **4)** Să se scrie două matrice $P,Q\in M_2(\mathbf{Z})$, $P,Q\neq I_2$, astfel încât $P\cdot Q = I_2$.

(4p) **5)** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}$?

(4p) **6)** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$?

(4p) **7)** Să se scrie un şir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu proprietatea $a_n > 2$, $\forall n\in\mathbf{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 2$.

(4p) **8)** Să se scrie un şir $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care are o infinitate de termeni strict pozitivi şi o o infinitate de termeni strict negativi şi care verifică $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(4p) **9)** Să se dea un exemplu de şir mărginit şi divergent.

(4p) **10)** Să se dea un exemplu de şir nemărginit şi care nu are limită.

SUBIECTUL III (15p)
(Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se notează cu S_n, $n \geq 2$, mulţimea permutărilor cu n elemente. Pentru o permutare $\sigma \in S_n$, notăm cu $m(\sigma)$ numărul de inversiuni ale permutării σ . Se mai consideră permutările $x, y \in S_4$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze permutările $x \cdot y$ şi $y \cdot x$.

(4p) **b)** Să se calculeze permutările x^{-1} şi y^{-1} .

(2p) **c)** Să se calculeze $m(x)$ şi $m(y)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\sum_{\sigma \in S_3} m(\sigma)$.

(1p) **e)** Să se arate că produsul permutărilor din S_3, efectuat în orice ordine, nu poate fi egal cu permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(1p) **f)** Să se arate că putem ordona permutările din S_4, astfel încât produsul permutărilor efectuat în această ordine, să fie egal cu permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(1p) **g)** Să se arate că putem ordona permutările din S_4, astfel încât produsul permutărilor efectuat în această ordine, să fie egal cu permutarea $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV (15p)
(Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}, (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{3^{1!}} + \frac{1}{3^{2!}} + \ldots + \frac{1}{3^{n!}}$

$b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot 3^{n!}}, c_n \in \{-1, +1\}$ şi $x_n = \frac{c_1}{3^{1!}} + \frac{c_2}{3^{2!}} + \ldots + \frac{c_n}{3^{n!}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se verifice că şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

(2p) **b)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.

(2p) **c)** Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sunt mărginite .

(2p) **d)** Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sunt convergente şi au aceeaşi limită.

(2p) **e)** Notăm cu $a \in \mathbf{R}$ limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Să se arate că numărul a este iraţional.

(2p) **f)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent şi are limita un număr din intervalul $[-a, a]$.

(1p) **g)** Să se arate că există cel puţin un număr b din intervalul $[-a, a]$ astfel încât pentru orice şir $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ să avem $\lim_{n\to\infty} x_n \neq b$.

Test alcătuit de Constantin Toma Drugan, Rm. Vâlcea