TEST DE EVALUARE ÎN MATEMATICA

desfasurat sub coordonarea prof. Constantin NĂSTĂSESCU, membru corespondent al ACADEMIEI ROMÂNE

17 . 11 . 2007

Clasa a XII -a

NOTĂ. **Toate subiectele sunt obligatorii. La subiectul I există un singur răspuns corect .La subiectul II se va da direct răspunsul.La subiectele III si IV se cer rezolvările complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 2 ore şi 30 de minute**

SUBIECTUL I (20p)

(Se scrie pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect)

Pe $\mathbf{R}$ considerăm legea de compoziție "$\circ$", definită prin $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

(4p) **1)** Egalitatea $x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1, x, y \in \mathbf{R}$, are loc

a) Pentru $\forall x, y \in \mathbf{R}$ **b)** Numai când $x < y$ **c)** Numai când $x > y$ **d)** Numai când $x = y$

(4p) **2)** Elementul neutru al legii de compoziție "$\circ$" este:

a) 1,5 **b)** 3 **c)** 0 **d)** 5

(4p) **3)** Relația $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ este adevărată

a) Numai când $x = y = z$ **b)** $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ **c)** Numai când $x \neq y \neq z$ **d)** Numai când $x \neq y$.

(4p) **4)** O primitivă a funcției $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \ln x$ este $F:(0,\infty) \to \mathbf{R}$

a) $F(x) = x\ln x$ **b)** $F(x) = x\ln x - x$ **c)** $F(x) = x\ln x + x$ **d)** $F(x) = \frac{1}{x}$

(4p) **5)** Dacă $F:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x}$, atunci $\lim_{x\to\infty} F(x)$

a) este un număr real **b)** este ∞ **c)** este $-\infty$ **d)** nu există

SUBIECTUL II (40p)

(Se scriu pe foaia de concurs doar numărul exercițiului şi rezultatul corespunzător)

(4p) **1)** Cât este suma elementelor din grupul $(\mathbf{Z}_5, +)$?

(4p) **2)** Cât este produsul elementelor din monoidul $(\mathbf{Z}_6, \cdot)$?

(4p) **3)** Dați un exemplu de grup finit şi necomutativ.

(4p) **4)** Dați un exemplu de grup infinit şi necomutativ.

(4p) **5)** Scrieți o primitivă a funcției $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sin x$.

(4p) **6)** Cât este $\int \frac{dx}{2x+3}$, $x \in (0,\infty)$?

(4p) **7)** Care este funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care are primitiva $F:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = e^{x^2}$?

(4p) **8)** Dacă $F:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$, cât este $\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x}$?

(4p) **9)** Dacă $F:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max\{x, x^2\}$, cât este $F(1) - F(0)$?

(4p) **10)** Dacă $F:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \min\{x, x^2\}$, cât este $F(1) - F(0)$?

SUBIECTUL III (15p)

(Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Pe mulțimea $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ definim legea "+" prin $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, $\forall (a,b),(c,d) \in E$. Considerăm mulțimea F a funcțiilor $f : E \to E$, care verifică relația $f((x,y))+f((p,q))=f((x,y)+(p,q))$, $\forall (x,y),(p,q) \in E$ şi mulțimea G a funcțiilor $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, care verifică relația $g(x+y)=g(x)+g(y)$, $\forall x,y \in \mathbf{Z}$, Pentru $f \in F$, notăm $f((1,0))=(i,j)$, $f((0,1))=(k,l)$ şi $A_f = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$. Se ştie că $(E,+)$ este grup comutativ.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(0,0)=(0,0)$, $\forall f \in F$ şi că $g(0)=0$, $\forall g \in G$.

(4p) **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall (a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in E$, $\forall f \in F$ şi $\forall n \in \mathbf{N}^*$, avem $f((a_1,b_1)+\ldots+(a_n,b_n))=f((a_1,b_1))+\ldots+f((a_n,b_n))$.

(2p) **c)** Să se arate că $g(x)=g(1)\cdot x$, $\forall x \in \mathbf{Z}, \forall g \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că mulțimea G conține doar două funcții bijective.

(1p) **e)** Să se arate că $f((x,y))=(x \quad y)\cdot A_f$, $\forall (x,y) \in E, \forall f \in F$. (Aici $(x \quad y) \in M_{1,2}(\mathbf{Z})$).

(1p) **f)** Să se arate că o funcție $f \in F$ este bijectivă dacă şi numai dacă $\det(A_f) \in \{\pm 1\}$.

(1p) **g)** Să se arate că, dacă $f \in F$ şi $(f \circ f \circ f \circ f)(x)=x$, $\forall x \in E$, atunci $f(x)=x$, $\forall x \in E$.

SUBIECTUL IV (15p)

(Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f_n(x)=\cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi pentru fiecare funcție f_n, considerăm o primitivă a sa $I_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care verifică relația $I_n(0)=0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Se admite cunoscută formula $2^n \cos a_1 \cdot \ldots \cdot \cos a_n = \sum \cos(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)$, unde suma se face după toate posibilitățile de alegere a semnelor.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_1(x)=\sin x, \forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $f_n(x+2\pi)=f_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}$

(2p) **c)** Să se arate că dacă $n \in \{5, 6\}$, atunci $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n \neq 0$, pentru orice alegere a semnelor.

(2p) **d)** Să se arate că există o alegere a semnelor astfel încât $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n = 0$, dacă şi numai dacă $n \in \mathbf{N}^*$ este un număr de forma $4k$ sau $4k+3$.

(1p) **e)** Să se arate că funcția I_{2008} nu este periodică.

(1p) **f)** Să se arate că funcția I_{2009} este periodică.

(1p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{I_{2010}(x)}{x}$.

Test conceput de Ion Savu şi Costel Chiteş