TEST DE EVALUARE ÎN MATEMATICA
desfasurat sub coordonarea prof. Constantin NĂSTĂSESCU, membru corespondent al ACADEMIEI ROMÂNE

17 . 11 . 2007

Clasa a X -a

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. La subiectul I există un singur răspuns corect .La subiectul II se va da direct răspunsul.La subiectele III si IV se cer rezolvările complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 2 ore şi 30 minute.

SUBIECTUL I (20p) **(Se scrie pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect)**

(4p) **1)** Câte numere iraționale conține mulțimea $\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},...,\sqrt{100}\}$?

a) 89 **b)** 90 **c)** 91 **d)**92

(4p) **2)** Câte numere de 3 cifre se pot forma utilizând cifrele 1 şi 2 ?

a) 7 **b)** 9 **c)** 6 **d)** 8

(4p) **3)** Care este modulul numărului complex $3+4i$?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)**8

(4p) **4)**Dacă $\frac{1+i}{1-i}=a+bi$, cu $a,b\in\mathbf{R}$, cât este $a+b$?

a) 2 **b)** 0 **c)** 1 **d)** -1

(4p) **5)**Cât este produsul $(\sin 1^\circ-\cos 1^\circ)\cdot(\sin 2^\circ-\cos 2^\circ)\cdot\ldots\cdot(\sin 89^\circ-\cos 89^\circ)$?

a)0 **b)** $\frac{1}{2^{89}}$ **c)** $-\frac{1}{2^{89}}$ **d)** 1

SUBIECTUL II (40p)
(Se scriu pe foaia de concurs doar numărul exercițiului şi rezultatul corespunzător)

(4p) **1)** Care dintre numerele $\sqrt{2}$ şi $\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

(4p) **2)** Cât este $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$?

(4p) **3)** Cât este $\sqrt[4]{(-2)^4}$?

(4p) **4)** Cât este numărul complex $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}$?

(4p) **5)** Cât este produsul $(2^{10}-2^2)\cdot(2^9-2^3)\cdot(2^8-2^4)\cdot\ldots\cdot(2^2-2^{10})$?

(4p) **6)** Dacă $\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\sin b\cdot\cos a$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$, cât este $\sin 15^\circ$?

(4p) **7)** Cât este produsul $\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 3^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 180^\circ$?

(4p) **8)** Dacă numărul complex z verifică relația $z^2+z+1=0$, cât este z^3 ?

(4p) **9)** Dacă $|\cos x|=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$, $\forall x\in\mathbf{R}$, cât este $\cos 15^\circ$?

(4p) **10)** Dacă numărul complex z verifică relația $z+\frac{1}{z}=2$, cât este z^{2007} ?

SUBIECTUL III (15p)
(Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră M mulțimea numerelor naturale nenule, care nu au cifra 9 în scrierea lor în baza 10.

(4p) **a)** Să se verifice că $1 \in M$, $10 \in M$, $18 \in M$ şi $19 \notin M$.

(4p) **b)** Să se determine cel mai mic şi cel mai mare număr natural din mulțimea M care se scriu în baza 10 utilizând 5 cifre.

(2p) **c)** Să se determine numărul de elemente din mulțimea M care au în scrierea lor zecimală 2007 cifre .

(2p) **d)** Să se arate că $1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+...+\left(\frac{9}{10}\right)^n<10$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(1p) **e)** Să se arate că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2^n}\geq\frac{n}{2}+1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(1p) **f)** Să se arate că pentru orice $m>0$, există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\geq m$.

(1p) **g)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi pentru orice $r_1<r_2<...<r_n \in M$, avem $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+...+\frac{1}{r_n}<80$.

SUBIECTUL IV (15p)
(Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră hexagonul regulat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, de latură a şi cu centrul în O şi punctele $B_1 \in (A_1A_2)$, $B_2 \in (A_2A_3)$, $B_3 \in (A_3A_4)$, $B_4 \in (A_4A_5)$, $B_5 \in (A_5A_6)$, $B_6 \in (A_6A_1)$, astfel încât $B_1A_2 = x\cdot a$, $B_2A_3 = y\cdot a$, $B_3A_4 = z\cdot a$, $B_4A_5 = t\cdot a$, $B_5A_6 = u\cdot a$, $B_6A_1 = v\cdot a$, cu $x, y, z, t, u, v \in (0,1)$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_5}=\vec{0}$.

(3p) **b)** Să se arate că $\overrightarrow{OB_1}=x\cdot\overrightarrow{OA_1}+(1-x)\cdot\overrightarrow{OA_2}$.

(2p) **c)** Să se arate că $\overrightarrow{B_3B_2}=y\cdot\overrightarrow{OA_1}+(1-z)\cdot\overrightarrow{OA_2}$.

(2p) **d)** Să se arate că patrulaterul $OB_1B_2B_3$ este paralelogram dacă şi numai dacă $x=y=z$.

(2p) **e)** Să se arate că triunghiurile $B_1B_3B_5$ şi $B_2B_4B_6$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $x+t=y+u=z+v$.

(1p) **f)** Să se arate că, dacă n este multiplu de 6, există vectorii nenuli şi distincți $\overrightarrow{OY_1}$, $\overrightarrow{OY_2}$, ..., $\overrightarrow{OY_n}$, de acelaşi modul, astfel încât $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\exists j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ care verifică relația $\overrightarrow{OY_i}=\overrightarrow{OY_j}+\overrightarrow{OY_k}$.

(1p) **g)** Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, se consideră vectorii nenuli şi distincți $\overrightarrow{OX_1}$, $\overrightarrow{OX_2}$, ..., $\overrightarrow{OX_n}$, de acelaşi modul, pentru care oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, există $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $\overrightarrow{OX_i}=\overrightarrow{OX_j}+\overrightarrow{OX_k}$. Să se arate că n este multiplu de 6.

Test conceput de Dana Heuberger şi Cristian Heuberger, Baia Mare