

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 26 IANUARIE 2008
Clasa a V-a

1. Se consideră tabloul următor cu 1004 linii.

L ₁ :	2
L ₂ :	4 2 4
L ₃ :	6 4 2 4 6
L ₄ :	8 6 4 2 4 6 8
.....	
L ₁₀₀₄ :	2008 8 6 4 2 4 6 8.....2008

- a) Care este primul număr de pe linia 123 ?
- b) De câte ori apare în acest tablou numărul 104 ? (Justificați răspunsul)
- c) Aflați suma tuturor numerelor diferite din tablou.

2. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbf{N} / x = \overline{abba}, a \neq b\}$, $B = \{y \in A / y \text{ este număr par}\}$, $C = \{z \in A / z : 5\}$.

- a) Găsiți cel mai mic, respectiv cel mai mare element al mulțimii B.
- b) Determinați cardB. (Justificați răspunsul)
- c) Calculați suma elementelor mulțimii C.

3. Un joc pe calculator funcționează după următorul algoritm : la fiecare pas , se afișează pe ecranul monitorului un careu de forma

cu un număr natural scris în fiecare din cele patru pătrățele .

După primii trei pași ai algoritmului sunt afișate următoarele careuri :

pasul 1 :	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">7</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td> </tr> </table>	1	3	7	5	pasul 2 :	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">9</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">11</td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">15</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">13</td> </tr> </table>	9	11	15	13		<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">17</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">19</td> </tr> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">23</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">21</td> </tr> </table>	17	19	23	21
1	3																
7	5																
9	11																
15	13																
17	19																
23	21																

- a) Ce careu va fi afișat la pasul 6 ?
- b) Să se calculeze suma celor patru numere situate în careul de la pasul 2008
- c) Există un careu astfel încât suma numerelor situate în el să fie 2008 ? (Justificați răspunsul)

4. Familia Popescu este formată din patru membri . Vârsta fiecărui membru al familiei este un număr de două cifre și aceste cifre sunt numere prime distincte. Tatăl lui Florin este cu un an mai mare decât mama lui Florin , iar Florin este de trei ori mai tânăr decât bunicul său. Ce vârsta are fiecare? (Justificați răspunsul) .

Notă :

- Durata concursului este de trei ore .
- Baremul de notare este : **1.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ;c) 2 puncte ; **2.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ;c) 2 puncte ; **3.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ;c) 2 puncte ; **4.** 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 26 IANUARIE 2008
Clasa a VI-a

1. La un turneu final de Campionat Mondial sau European , de fotbal , participă mai multe echipe naționale . Numărul lor este multiplu de patru . Ele sunt împărțite în grupe de câte patru echipe. În prima fază , faza grupelor , se joacă în fiecare grupă , meciuri , după sistemul "fiecare joacă cu fiecare" (de exemplu în grupa A , fiecare echipa joacă trei meciuri , cu celelalte trei adversare) , la fel și în celelalte grupe. În faza a doua, eliminatorie , echipele clasate pe primele două locuri în fiecare grupă , joacă meciuri eliminatorii , după sistemul , "cine pierde pleacă acasă " , iar cine câștigă avansează în faza următoare (de exemplu , dacă sunt opt echipe în faza a doua , se vor juca patru meciuri eliminatorii , iar cele patru câștigătoare joacă mai departe două meciuri ...). În finală vor rămâne două echipe , care joacă finala , iar echipa învingătoare devine campioană. Se știe că la Campionatul Mondial participă 32 de echipe.

- Câte meciuri se vor juca la un Campionat Mondial ?
- Câte meciuri joacă echipa campioană mondială?
- Dacă în faza "grupelor" , se joacă câte patru meciuri pe zi , în faza "eliminatorie" câte două meciuri pe zi , iar finala se joacă în zi separată , în câte zile se va juca tot Campionatul Mondial ? (presupunem că nu există zile de pauză) .
- Campionatul European de fotbal se desfășoară după același sistem , ca și Campionatul Mondial . Dacă la Campionatul European s-au jucat în total 31 de meciuri , câte echipe au participat ? (Justificați răspunsul) .

2. Unghiurile în jurul unui punct O, $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ au respectiv bisectoarele $[OX]$, $[OY]$, $[OZ]$, iar $m(\angle XOY)$, $m(\angle YOZ)$, $m(\angle XOZ)$ sunt direct proporționale cu 5, 6, 7.

- Aflați măsurile unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$.
- Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\angle BOX$ și $\angle COZ$.

3. Perechile de unghiuri $\angle AOB$, $\angle BOC$ respectiv $\angle BOC$, $\angle COD$ sunt adiacente și $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) = 140^\circ$. Se mai știe că măsurile unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$ sunt direct proportionale cu numerele m și n iar măsurile unghiurilor $\angle BOC$, $\angle COD$ sunt invers proportionale cu numerele p și n unde m , n și p sunt numere naturale prime care verifică egalitatea $m + 10n + 2p = 82$.

- Să se determine numerele m , n și p
- Să se calculeze măsurile unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle COD$
- c) Dacă , în plus , unghiurile $\angle AOC$ și $\angle COD$ sunt adiacente iar punctul $M \in (OD)$, C astfel încât $m(\angle DOM) = 90^\circ$ și N astfel încât (ON) este bisectoarea $\angle COM$. Să se demonstreze că (ON) este și bisectoarea $\angle AOD$.

4. Se dau trei numere naturale consecutive.

- Arătați că unul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două.
- Aflați numerele știind că suma lor este cubul unui număr prim.

Notă :

- Durata concursului este de trei ore .
- Baremul de notare este : **1.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ;c) 1 punct ; d) 1 punct ; **2.** a) 4 puncte ; b) 3 puncte ; **3.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ;c) 2 puncte ; **4.** a) 4 puncte ; b) 3 puncte .

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 26 IANUARIE 2008
Clasa a VII-a

1. Fie triunghiul ABC, cu măsura unghiului exterior adiacent unghiului B egală cu jumătate din măsura unghiului exterior adiacent unghiului C și cu 40° mai mic decât măsura unghiului exterior adiacent unghiului A.

- Să se determine măsurile unghiurilor $\triangle ABC$.
- Dacă (BM bisectoarea unghiului B și $MN \parallel AB$, $M \in AC$, $N \in BC$, să se arăte că $\triangle MNB$ este isoscel
- Dacă $AM=15\text{cm}$, $MN=10\text{cm}$, $CM=6\text{cm}$, aflați lungimile segmentelor $[CB]$ și $[AB]$.

2. Fie numerele naturale $y_1, y_2, \dots, y_{2008}$ cu proprietatea $y_{n+1} = 2 + y_n$, oricare ar fi $n \in N^*$.

Dacă $A = 2[(-1)^{2008} 2008 + (-1)^{2007} 2007 + (-1)^{2006} 2006 + \dots + 2 - 1]$,

$B = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2008}$ și $\frac{A}{B} = \frac{1}{2008}$ arătați că :

- $B = 2008^2$;
- $y_{\frac{A}{2}} = 2007$.

3.

- Să se arate că: $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}, \forall n \in N$.
- Să se arate că: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \leq \frac{4}{3}, \forall n \geq 0$.

4. Fie triunghiul ABC, bisectoarea unghiului BAC intersectează pe (BC) în F. Construim prin $M \in (BF)$ o paralelă la AF care intersectează pe (CA) în D și prin $N \in (CF)$ o paralelă la AF care intersectează pe (BA) în E. Arătați că $AD \cdot NF = AE \cdot MF$.

Notă :

- Durata concursului este de trei ore .
- Baremul de notare este : **1.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ;c) 2 puncte ; **2.** a) 4 puncte ; b) 3 puncte ; **3.** a) 3 puncte ; b) 4 puncte ;**4.** a) 7 puncte .

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 26 IANUARIE 2008
Clasa a VIII-a

1. Se consideră rombul $ABCD$ având $AC=2BD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și E mijlocul segmentului (AO) . Pe perpendiculara în E pe planul rombului se ia punctul F astfel încât $m(\angle AFC) = 90^\circ$. Dacă α este măsura unghiului dintre planele (ABD) și (BDF) , β este măsura unghiului dintre planele (ABC) și (BCF) iar δ este măsura unghiului dintre dreapta BF și planul (ABC) să se afle :

- $\sin \alpha$;
- $\cos \beta$;
- $\operatorname{tg} \delta$.

2. a) Determinați numerele raționale a și b știind că :

$$\frac{a}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} + \frac{b}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} ;$$

b) Calculați $(a+1)^4$ și \sqrt{E} , unde $E = \sqrt{(1+2007^2) \cdot (1+2009^2)} - 4$.

3.a) Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}^*$ și $x + y + z = xyz$ arătați că $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} + 2 \in \mathbb{Q}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale, ecuația : $[x] + [2x] = 2008$ ($[x]$ este partea întreagă a numărului real x).

4. a) Fie cinci puncte în spațiu cu proprietatea că oricare patru dintre ele sunt puncte necoplanare. Arătați că există printre aceste puncte două care determină o dreaptă neparalelă cu planul determinat de celelalte trei puncte .

b) Toate punctele din spațiu se colorează în cinci culori diferite , folosind toate culorile .Să se arate că există un plan care conține patru puncte de culori diferite .

Notă :

- Durata concursului este de trei ore .
- Baremul de notare este : **1.** a) 3 puncte ; b) 2 puncte ;c) 2 puncte ; **2.** a) 3 puncte ; b) 4 puncte ; **3.** a) 3 puncte ; b) 4 puncte ; **4.** a) 3 puncte ; b) 4 puncte .

