CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 3 martie 2007

CLASA A IX-A

1. Într-o progresie geometrică $(a_n), n \in \mathbf{N}^*$, $a_n > 0, \forall\ n \in \mathbf{N}^*$ se cunosc sumele:

$a_1 + a_2 + ... + a_{2007} = 2$ şi $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2007}} = 1$.

Calculați produsul: $P = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2007}$.

2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, o funcție pentru care avem:

$$\frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{3} \cdot f(2007 - x) = \frac{5}{2007} x + \frac{5}{2}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

a) Arătați că $f(x) + f(2007 - x) = 12, x \in \mathbf{R}$.

b) Determinați f.

3 Considerăm mulțimea $A = \{x^2 + y^2 | x, y \in \mathbf{N}\}$

a) Verificați identitatea $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad - bc)^2, \forall a, b, c, d \in \mathbf{N}$.

b) Arătați că, dacă $p, q \in A$, atunci $p \cdot q \in A$.

c) Arătați că $2050 \in A$.

d) Arătați că $2^n \in A$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

e) Arătați că $2007 \notin A$.

4. Un vas în formă de paralelipiped dreptunghic cu lățimea de 1m şi lungimea de 2m este umplut cu apă până la înălțimea de 0,5m. Se aşează un cub metalic cu o față pe fundul vasului, iar apa din vas se ridică acum exact până la partea superioară a cubului. Aflați latura cubului.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 3 martie 2007

CLASA A X A

1. Fie date numerele: $a = \sqrt[3]{65} - 4$ şi $b = 4 - \sqrt[3]{63}$.

a) Calculați cuburile acestor numere.

b) Comparați numerele $A = \sqrt[3]{1 - 12\sqrt[3]{65^2} + 48\sqrt[3]{65}} + 4$ şi $B = \sqrt[3]{1 - 48\sqrt[3]{63} + 36\sqrt[3]{147}} + \sqrt[3]{63}$.

2. Fie $z_1 = a + bi \in \mathbf{C} - \mathbf{R}, b > 0$ şi $z_2 = \dfrac{1 - \overline{z_1}}{1 + \overline{z_1}}$, două numere complexe astfel încât $z_1 - z_2$ şi z_2^2 sunt numere reale. Arătați că $z_1 = z_2 = i$.

3. a) Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbf{R}$,

$$\log_3(4 + 3x^4) \geq 2\log_3 2.$$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\log_3(4 + 3x^4) + \log_5(1 + \sqrt[3]{x^2}) + \log_2(1 + x^2) = \log_3 4.$$

4. O persoană depune la bancă o sumă S. În primul an primeşte dobândă de 6%, iar în anii următori dobânda creşte cu câte 1% în fiecare an, față de precedentul an (în al doilea an 7%, în al treilea an 8% etc.).

a) Aflați suma pe care o are după *n* ani, ştiind că în această perioadă nu a depus şi nu a retras nici o sumă.

b) Arătați că după 10 ani persoana are în cont mai mult decât dublul sumei depuse inițial.

Nota: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 3 martie 2007

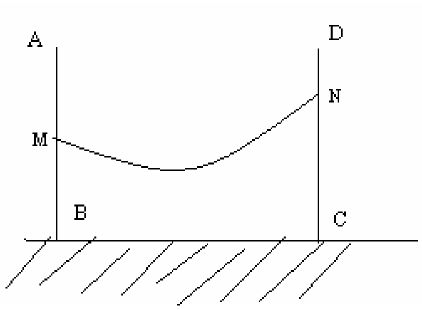
CLASA A XI-A

1. Se dau matricele $A, B, C \in M_3(\mathbf{R})$ astfel încât $A^2 = BC$, $B^2 = CA$, $C^2 = AB$.
   a) Arătați că $A^3 = B^3 = C^3$.
   b) Dati exemplu trei matrice din $M_3(\mathbf{R})$, distincte două câte două, care verifică egalitățile de mai sus.

2. Fie matricea $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le 3} \in M_3(\mathbf{R})$, unde $a_{ij} \in \{-1, 1\}$, $\forall i, j = \overline{1,3}$ şi $\Delta = \det A$.
   a) Arătați că $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, unde $|x_i| = |y_i| = 1, \quad \forall i = \overline{1,3}$.
   b) Arătați că $\exists M_i(x_i, y_i), \; i = \overline{1,3}$ astfel încât $|\Delta| = 2 \cdot S_{M_1 M_2 M_3}$.
   c) Determinați valoarea maximă pentru Δ.

3. Să se determine numerele reale *a*, *b*, *c* astfel încât $\lim\limits_{x \to \infty} x(\sqrt{ax^2 + bx + c} - 2x - 3) = 2007$.

4. O persoană are la dispoziție doi stâlpi verticali de lungime 1 (aşezați ca în figură) şi o sfoară cu lungimea 2 (*BC* = 1).
a) Demonstrați că oricum leagă sfoara între punctele $M \in (AB)$ şi $N \in (CD)$, există un punct *P* pe sfoară, egal depărtat de sol şi de stâlpul [*AB*].
b) Demonstrați că oricum leagă sfoara între punctele $M \in (AB)$ şi $N \in (CD)$, există un punct *Q* pe sfoară astfel încât suma dintre distanța de la punctul *Q* la sol şi distanța de la *Q* la [*AB*] să fie egală cu 1.



Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 3 martie 2007

CLASA A XII A

1. Pe $\boldsymbol{R}$ se defineşte legea de compoziție: $x * y = x + y + xy,\ \forall x, y \in \boldsymbol{R}$.
a) Demonstrați că $(\boldsymbol{R}, *)$ este monoid comutativ dar nu este grup.
b) Arătați că $(-1) * x = x * (-1) = -1,\ \forall x \in \boldsymbol{R}$.
c) Calculați $(-2007) * (-2006) * \ldots * (2006) * (2007)$.

2. Calculați
a) $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
b) $\int_0^1 \frac{1}{2^x + 3} dx$.

3. Fie $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \boldsymbol{R},\ f(x) = e^x + \sin x + \cos x$.
a) Determinați $a, b \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $af(x) + bf'(x) = e^x + \cos x,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
b) Calculați $\int \frac{e^x + \cos x}{f(x)} dx,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Fie $(G, *)$ un grup cu elementul neutru e şi a, b din G astfel încât $a * b \neq b * a$.
a) Arătați că a, b, $a * b$, $b * a$ şi e sunt elemente distincte ale grupului G.
b) Arătați că orice grup cu patru elemente este comutativ.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7