Clasa a IX-a

1. a) Fie $0 < a < b$ şi $k > 0$. Arătaţi că $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$.

b) Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, \infty)$ demonstraţi că:

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + ... + x_n} + \frac{2x_2}{x_1 + 2x_2 + x_3 + ... + x_n} + ... + \frac{nx_n}{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + nx_n} > 1.$$

Gheorghe Boban

2. Să se arate că $\{x \in \mathbf{R} \mid [x]\{x\} = x\} = \left\{ \frac{p^2}{p-1} \mid p \in \mathbf{Z}, \mathbf{p} \leq \mathbf{0} \right\}$.

Gheorghe Boban

3. Se consideră mulţimea $M = \{4k + 5l \mid k, l \in \mathbf{N}\}$.

a) Arătaţi că $12, 13, 14, 15 \in M$.

b) $11 \notin M$.

c) Dacă $x \in M \Rightarrow x + 4 \in M$.

d) $(\forall) n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3, 6, 7, 11\} \Rightarrow n \in M$.

Gheorghe Boban

4. Pe un cerc de centru O şi rază r, se consideră punctele B, C şi M astfel încât $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$. Fie A un alt punct pe acelaşi cerc, distinct de celelalte.

a) Determinaţi măsura unghiului BAC.

b) Calculaţi în funcţie de r modulul vectorului $\overrightarrow{BC}$.

c) Dacă vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ sunt coliniari arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Gheorghe Boban

Clasa a X-a

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încât $(f \circ f)(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2, x < 2 \\ \log_2 x + 1, x \geq 2 \end{cases}$. Să se arate că f este bijectivă.

Miana Şerban

2. Fie z_1, z_2 două numere complexe distincte, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$. Să se calculeze:

a) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$.

b) $z_1^{2006} + z_1^{2005} z_2 + z_1^{2004} z_2^2 + \ldots + z_1 z_2^{2005} + z_2^{2006}$.

Tiberiu Barta

3. Să se calculeze: $\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha + \beta)$, în funcție de α, β şi n.

4. Să se rezolve ecuația $3^x + 4^x + 2^{-x} + 6^{-x} = 4$.

Tiberiu Barta

Clasa a XI-a

1. Să se calculeze A^n, unde $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha+\cos\beta & \sin\alpha+\sin\beta\\ -\sin\alpha-\sin\beta & \cos\alpha+\cos\beta\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$.

Tiberiu Barta

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)\right]^n$.

Miana Şerban

3. Fie x_1,x_2,x_3 rădăcinile ecuației: $x^3+2x^2+3x+1=0$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze AA^t, unde A^t este transpusa matricei A.

b) Calculați determinantul $\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2x_1} & \dfrac{1}{x_1+x_2} & \dfrac{1}{x_1+x_3}\\ \dfrac{1}{x_2+x_1} & \dfrac{1}{2x_2} & \dfrac{1}{x_2+x_3}\\ \dfrac{1}{x_3+x_1} & \dfrac{1}{x_2+x_3} & \dfrac{1}{2x_3}\end{vmatrix}$.

Miana Şerban

4. Să se calculeze $L_n=\lim\limits_{x\to o}\dfrac{1-\sqrt{(2x)^2+1}\sqrt[3]{(3x)^2+1}\ldots\sqrt[n]{(nx)^2+1}}{x^2}, n\in N^*-\{1\}$

Tiberiu Barta

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
25.02.2006

Clasa a XII– a

1. a) Fie $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$. Arătați că următoarea corespondență: $(x,y)\to x*y=x^{\ln y}$ este o lege de compoziție pe G și $(G,*)$ este grup comutativ.

b) Fie $(G,\cdot)$ asfel încât $(x\cdot y)^2=x^2\cdot y^2$, $\forall x,y\in G$. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

2.Pentru orice $n\in N$ se consideră mulțimea $H_n=\{\frac{k}{n!}\mid k\in Z\}\subset Q$. Aratați că:

a) dacă $x,y\in H_n\Rightarrow x+y\in H_n$; **b)** dacă $x\in H_n\Rightarrow -x\in H_n$

c) dacă $n<p\in N^*\Rightarrow H_n\subset H_p$; **d)** $\forall r$ rațional, există $n\in N$ a. î. $r\in H_n$

e) dacă $(G,+)$ este subgrup al grupului $(Q,+)$ și $\frac{1}{n!}\in G, n\in N^*\Rightarrow H_n\subset G$

3. Considerăm funcțiile $f:R\to R, f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}$ și $g:(0,1)\to R, g(x)=\dfrac{f(x)+x-1}{\sqrt{-4x^4+8x^3-8x^2+4x}}$.Să se calculeze: $\int f(x)dx$ și $\int g(x)dx$.

4. Se consideră $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx \quad ,\forall x\in N$

Se cer:**a)** Calculați I_0 și I_1 ;**b)** Demonstrați că $I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$, $\forall x\in N, n\geq 2$

c)Demonstrați că $1\leq\dfrac{I_n}{I_{n+1}}\leq\dfrac{n+1}{n}$, $\forall x\in N^*$; **d)**Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{I_{n+1}}$

Notă:
- toate subiectele sunt obligatorii;
- timp de lucru: trei ore;