Olimpiada de matematică

Etapa județeană

Barem clasa a V-a

Subiectul 1

a) $A \cup B = \{17, 23, 34, 46, 51, 68, 69, 85, 92\}$ **(2 puncte)**

b) Datorită conditiilor, a doua cifră este 4, apoi 6 după care putem opta pentru 8 sau 9. **(1 punct).** Dacă continuăm cu 8, urmează 5, apoi 1 şi 7. Nu se mai poate continua deoarece nu avem multiplu al lui 17 sau 23 care sa inceapă cu 7! Rămâne secvența 3468517 **(1 punct).** Dacă a patra cifră este 9, urmează 2 şi apoi 3 şi se reia ciclul. Se obține secvența 34692 care se poate continua.**(1 punct)**

Pentru numarul de 2006 cifre se va repeta secvența 34692 de 401 ori şi atunci ultima cifră va fi 3 **(1 punct)** sau de 400 ori si din cealaltă secvență primele 6 cifre şi atunci ultima cifră va fi 1 **(1 punct).**

Subiectul 2

a) $\frac{1}{2}+\frac{2^1}{2^2}+\frac{2^2}{2^3}+\cdots+\frac{2^{2003}}{2^{2004}}+\frac{2^{2004}}{2^{2005}}+\frac{2^{2005}}{2^{2006}} = 2006\cdot\frac{1}{2} = 1003$ **(2 puncte)**

b) Ultima cifră a lui a^{2005} coincide cu ultima cifră a lui a, pentru orice numar natural a **(2 puncte)**

Ultima cifră a sumei puterilor coincide cu ultima cifră a sumei numerelor **(2 puncte)**

Suma numerelor se divide cu 10, rezultă suma puterilor se divide cu 10 **(1 punct)**

Subiectul 3

a) Prin înmulțirea celor două relații rezultă: $x^3y^3z^3 = 7^9$. De unde, $xyz = 7^3$ **(2 puncte)**

b) Inlocuind pe a, b, c, d, se obține: $3^{2p}+3^{3q}+3^{5r}=3^{7s}$ Putem presupune, fără a restânge generalitatea că primul termen al sumei este cel mai mic. In caz contrar se raționează similar $3^{2p}\left(1+3^{3q-2p}+3^{5r-2p}\right)=3^{7s}$ **(2 puncte)**

Rezultă de aici că $\left(1+3^{3q-2p}+3^{5r-2p}\right)$ trebuie să fie o putere a lui 3, ceea ce este posibil numai dacă exponenții sunt zero. $3q = 2p$ si $5r = 2p$.**(1 punct)**

Datorită divizibilității, $2p = 3q = 5r = 30m$, înlocuind avem $3 \cdot 3^{30m} = 3^{7s}$ **(1 punct)**

$30m + 1 = 7s$, s minim se obtine pentru $m = 3$. Deci $p = 45; q = 30; r = 18; s = 13$ şi $p + q + r + s = 106$ **(1 punct)**

Subiectul 4

Vom considera în locul numerelor date resturile împarțirii acestora la 3. Vom avea patru numere cu restul zero, 3 numere cu restul 1 si 3 numere cu restul 2.**(1 punct)** Deoarece restul împărțirii sumei $a + b + c + d$ la 3 este zero, avem pentru resturile împărțirii numerelor a, b, c, d la 3, următoarele posibilități:

- toate resturile sunt zero, adică toate numerele sunt multiplii de trei, o soluție **(1 punct)**
- doua resturi zero, un rest egal cu 1 şi un rest egal cu doi. $6 \cdot 3 \cdot 3$=54 posibilitați **(1 punct)**
- un rest zero, trei resturi 1: 4 posibilități **(1 punct)**
- un rest zero, trei resturi 2: 4 posibilități **(1 punct)**
- doua resturi 1 si doua resturi 2: 9 posibilități **(1 punct)**

În total se pot face 72 alegeri **(1 punct)**

Notă

Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctajul maxim.