CENTRUL DE EXCELENŢĂ PENTRU TINERI CAPABILI DE PERFORMANŢĂ
- FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a IX-a

1. Arătaţi că există o singură funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisface egalitatea

$$f^2(x+y)+f^2(x-y)=f^2(x)+y^2f^2\left(\frac{x}{y}\right),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}^*.$$

2. Să se determine numerele reale x ştiind că şirul $u_n=[nx]$, $\forall n\geq 1$, este progresie aritmetică.

3. Arătaţi că, dacă $x,y\in\mathbb{R}$, atunci $|1+x|+|1+y|+|1+xy|\geq|x|+|y|$.

4. Notăm cu O punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD ale patrulaterului convex $ABCD$ şi fie I_1, I_2, I_3, I_4 respectiv centrele cercurilor înscrise ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA. Să se demonstreze că patrulaterul $I_1I_2I_3I_4$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$tg\left(\frac{\measuredangle AOB}{2}\right)=\frac{(AB+BO+OA)(CD+DO+OC)}{(BC+CO+OB)(DA+AO+OD)}.$$

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

CENTRUL DE EXCELENŢĂ
PENTRU TINERI CAPABILI
DE PERFORMANŢĂ
- FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a X-a

1. Fie $p \in N^*$. Atunci:

1) $\left|1+z^p\right| \geq \left|1-|z|\right|^p, \forall z \in \mathbb{C}.$

2) $\left|1-z^p\right| \geq \left|1-|z|\right|^p, \forall z \in \mathbb{C}.$

3) $\left|1+z^p+z^{2p}\right| \geq \left|1-|z|\right|^{2p}, \forall z \in \mathbb{C}.$

2. Fie $a,b,c \in (1,\infty)$ astfel încât $a+b+c=6$. Să se demonstreze că

$$\log_a\left(\sqrt[3]{bc}+a\right)+\log_b\left(\sqrt[3]{ca}+b\right)+\log_c\left(\sqrt[3]{ab}+c\right) \geq \frac{11}{2}.$$

3. Considerăm hexagonul regulat *ABCDEF* de centru *O* şi fie $M \in (AB), N \in (BC)$ două puncte astfel încât *MB* = *NC*. Dacă *P* este mijlocul segmentului *NE*, *Q* este mijlocul segmentului *MP* şi *R* este mijlocul segmentului *OA*, să se demonstreze că punctele *C*,*Q* şi *R* sunt coliniare.

4. Arătaţi că, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, fracţia $\dfrac{\left(C_{n+1}^{n-1}\right)!}{\prod_{k=1}^{n} k!}$ este număr natural.

.

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

COLEGIUL NAŢIONAL
"ŞTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL
CENTRELOR DE EXCELENŢĂ
DIN MOLDOVA
- 20 mai 2006 -

CENTRUL DE EXCELENȚĂ PENTRU TINERI CAPABILI DE PERFORMANȚĂ
- FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a XI-a

1. Să se rezolve, în $M_3(\mathbb{N})$, unde $\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor naturale, ecuația $A^3 = I_3$.

2. Fie f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții reale, astfel încât f are proprietatea lui Darboux şi, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, există şi este finită $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-g(x)}{h}$. Arătați că $f(x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

3. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietățile $AB = A$ şi $BA = B$. Să se arate că matricea $A+B-I_n$ este inversabilă.

4. Fie $m, n\in\mathbb{N}^*$ două numere impare. Atunci:

$$\left[(a+b+c)^n-a^n-b^n-c^n\right]\left[(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m\right]\geq 0, \forall a,b,c\in\mathbb{R}.$$

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

COLEGIUL NAŢIONAL
“ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ DIN MOLDOVA

- 20 mai 2006 -

CENTRUL DE EXCELENŢĂ PENTRU TINERI CAPABILI DE PERFORMANŢĂ
- FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a XII-a

1. Fie funcţia $f:\left(\frac{2}{\pi};+\infty\right)\to(0;+\infty)$, $f(x)=x\cdot\cos\frac{1}{x}$.
   a. arătaţi că este funcţie bijectivă;
   b. dacă $g:(0;+\infty)\to\left(\frac{2}{\pi};+\infty\right)$ este inversa funcţiei f, arătaţi că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu
   $$x_n=f(n)\cdot\left[\frac{1}{g^2(n)+f(n)}+\frac{1}{g^2(n)+2f(n)}+\frac{1}{g^2(n)+3f(n)}+\ldots+\frac{1}{g^2(n)+nf(n)}\right]$$
   $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, este convergent şi determinaţi limita sa.

2. Fie numerele reale strict pozitive a,b,α. Calculaţi $\lim\limits_{t\nearrow\frac{\pi}{2}}\int_0^t\left(\frac{a}{a+b\cdot tg^{\alpha}x}+\frac{b}{b+a\cdot tg^{\alpha}x}\right)dx$

3. Se consideră $(G,\cdot)$ un grup finit multiplicativ de matrice de ordin doi cu elemente numere complexe. Să se arate că, dacă există $A,B\in G$ astfel încât $tr(A)=tr(B)=tr(AB)=0$, atunci grupul $(G,\cdot)$ nu este comutativ şi este de ordin par.
   Să se dea un exemplu de grup cu proprietatea enunţată în text.

4. Polinomul $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\in\mathbb{C}[X]$ de grad $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, cu proprietatea $a_{n-k}=\overline{a_k}, \forall k=\overline{0,n}$, are toate rădăcinile de acelaşi modul, iar $a_n\in\mathbb{R}^*$. Să se arate că polinomul f are toţi coeficienţii reali.

NOTĂ: Timp efectiv de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.