CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„<u>Dimitrie Pompeiu</u>”

12-14 mai 2006, Botoşani

<u>CLASA A V-A</u>

<u>Subiectul I</u>

a) Numărul natural n dă restul 5 la împărțirea prin 7 şi restul 4 la împărțirea prin 11. Ce rest dă numărul n la împărțirea prin 77?

b) Fie S suma cifrelor unui număr natural A şi P produsul cifrelor numărului A. Să se determine numărul A ştiind că A+S+P=106.

(***)

<u>Subiectul II</u>

Fie numerele:

$a = 2\cdot 4 + 4\cdot 6 + 6\cdot 8 + ... + 2004\cdot 2006$ şi $b = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 1002^2$.

Aflați câtul şi restul împărțirii numărului a la numărul b.

(*Ioan Țicalo*)

<u>Subiectul III</u>

Arătați că oricare ar fi numărul natural nenul n, printre elementele mulțimii $\{n, n+1, n+2, ..., 2n\}$ există cel puțin o putere a lui 2.

(***)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„**Dimitrie Pompeiu**”
12-14 mai 2006, Botoşani

CLASA A VI-A

Subiectul I

Într-o gospodărie G sunt un număr natural de găini, curci, câini şi viței. Cheltuielile zilnice pentru hrana animalelor sunt date în tabelul:

găini	curci	câini	viței
1	2	4	8

Dacă nu se dă mâncare la găini, cheltuiala zilnică este de 22 lei, iar dacă nu se dă mâncare la viței cheltuiala zilnică este de 24 lei.

Care este numărul total al picioarelor viețuitoarelor?

Subiectul II

Fie dreptunghiul ABCD cu AB =18 şi BC =8. Pentru un punct E pe latura $[CD]$ (cu $DE < CE$), BE şi AD prelungite se taie în *H*. Fie $F \in [BE]$, astfel încât $[BF] \equiv [EH]$. Paralela prin *F* la *BC* taie *AB* în *G*, iar paralela prin *H* la *AB* taie *FG* în *K*.

a) Să se arate că $AG \cdot AH = AB \cdot AD$.

b) Se poate alege E pe $[CD]$, astfel încât $[AG] \equiv [AH]$?

Subiectul III

Fie $\mathrm{A}(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, pentru $n \geq 2$.

a) Arătați că există numerele naturale nenule *a*, *b* şi *c*, cu *a* impar, astfel încât $\mathrm{A}(8) = \frac{a}{2^b \cdot c}$.

b) Arătați că $\mathrm{A}(2006)$ nu este număr natural.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„Dimitrie Pompeiu”
12-14 mai 2006, Botoșani

CLASA A VII-A

Subiectul I

c) Arătați că $3x^3 - 10x - 4 = (x-2)(3x^2 + 6x + 2), \forall x \in \mathbb{R}$.

d) Demonstrați că $3\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4, \forall a, b > 0$.

Subiectul II

Fie $n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 50 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 49$.

a) Determinați ultima cifră a numărului *n*.
b) Determinați penultima cifră a numărului *n*.
c) Determinați antepenultima cifră a numărului *n*.

Subiectul III

Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 105^o, m(\sphericalangle B) = 30^o$. Se consideră DE mediatoarea segmentului $[BC], D \in BC, E \in AB, [CF$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCE, F \in AB$, iar $\{I\} = CF \cap DE, \{G\} = CE \cap AI$. Să se arate că triunghiul $\triangle DFG$ este echilateral.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„**Dimitrie Pompeiu**”
12-14 mai 2006, Botoşani

CLASA A VIII-A

Subiectul I

c) Fie intervalul I=(a;b). Dacă $\mathrm{I} \cap \mathbb{Z} = \{2001; 2002\}$, să se calculeze:

$$|a-2000|+|b-2003|-|b-a|.$$

(Daniel Stretcu, G. M. 5-6/2002)

d) Demonstrați că: $4x^4 + x^2 - 3x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(Ioan Safta, G. M. 9-10/2001)

Subiectul II

Fie S suma inverselor a cinci numere naturale consecutive. Să se arate că

e) $S \notin \mathbb{N}$;

f) S se transformă în fracție periodică mixtă.

(Artur Bălăucă şi Alexandru Negrescu)

Subiectul III

Fie cuburile $ABCDA_1B_1C_1D_1, A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2, A_2B_2C_2D_2A_3B_3C_3D_3$ suprapuse, unde $AB = a$ şi punctele *M, N, P* astfel încât: $M \in (BC), N \in (DD_1), P \in (A_1B_1)$ şi $MB = ND = PA_1 = x$. Aflați:

d) măsura unghiului format de dreptele AB_3 şi CD_2;

e) distanța dintre dreptele B_1D_2 şi AC;

f) măsura unghiului format de planele (MNP) şi (ACC_1).

(Artur Bălăucă)