Inspectoratul Şcolar al Judeţului Iaşi
MATEMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Faza locală, 28 ianuarie 2006

Clasa a V-a

Subiectul 1. Fie $a = 32^{25}$ şi $b = 25^{32}$.

a) Comparaţi numerele ***a*** şi ***b***.

b) Aflaţi cel mai mic număr natural ***n*** astfel încât $32^{25} \cdot 25^{32} \cdot n$ să fie pătrat perfect.

c) Aflaţi suma cifrelor numărului $a \cdot b - 1$.

Subiectul 2. La împărţirea numărului natural ***n*** cu **5** se obţine restul **3**, iar la împărţirea cu **7** restul este **6**.

a) Ce resturi se obţin la împărţirea numerelor $14n$ şi $15n$ la **35**?

b) Ce rest se obţine la împărţirea lui ***n*** la **35**?

Subiectul 3. Se scriu numerele naturale în ordine crescătoare, începând cu **1**. Aflaţi cifra de pe locul **2006**.

Subiectul 4. Mai mulţi copii joacă telefonul fără fir. Primul copil se gândeşte la un număr natural, îl dublează şi îl şopteşte următorului; acesta îl dublează şi transmite rezultatul următorului copil. Jocul continuă până când ultimului copil i se şopteste numărul **940**. Câţi copii s-au jucat şi la ce număr s-a gândit primul copil?

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele se notează 0 – 7 puncte.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Iaşi
MATEMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Faza locală, 28 ianuarie 2006

Clasa a VI-a

Subiectul 1.

a) Determinaţi numerele $\overline{abc}$, scrise în baza *10*, pentru care $a \cdot \overline{bc} + b \cdot \overline{ca} + c \cdot \overline{ab} = 11\, abc$.

b) În fiecare clasă a unei şcoli sunt cel puţin 25 de elevi şi cel mult 30 elevi. Ştiind că numărul elevilor şcolii poate fi oricare de la *480* la *560*, să se afle numărul claselor.

Subiectul 2.

a) Să se afle numerele naturale prime ***a,b,c*** care îndeplinesc condiţia $a + 2b + 4c = 28$.

b) Fie ***a*** şi ***b*** două numere naturale. Arătaţi ***că*** $43 / 1000\, a + b \Leftrightarrow 43 / a + 4b$.

Subiectul 3.

a) Construiţi figura geometrică care îndeplineşte simultan condiţiile:

*1. Punctele **A,B,C** şi **D** sunt coliniare;*
*2. Segmentele **AD** şi **BC** au acelaşi mijloc notat cu M;*
*3. Punctul **A** nu se află între **B** şi **D**;*
*4. Segmentul **MC** este triplul segmentului **MA**.*

b) În condiţiile figurii geometrice de la ***a)*** arătaţi că $3 \cdot PQ = 2 \cdot BC$, unde ***P*** şi ***Q*** sunt mijloacele segmentelor ***AC*** respectiv ***BD***.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele se notează 0 – 7 puncte.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Iaşi
MATEMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 28 ianuarie 2006
Clasa a VII-a

Subiectul 1.

a) Arătaţi că nu există numere naturale a,b,c care verifică simultan egalităţile: $b+c=a+1$ şi $b^2+c^2=a^2$;

b) Rezolvaţi în **Q** ecuaţia: $x+|x+1|+[x+1]=9$.

Subiectul 2.

Fie numerele naturale a,b,x şi y astfel încât b şi y sunt nenule iar a şi b sunt invers proporţionale cu x şi $\frac{1}{y}$.

a) Demonstraţi că $1+xy$ divide pe $a+b$;

b) Demonstraţi că $x+y \le a+b$ şi $xy \le ab$;

c) Aflaţi numerele x şi y ştiind că $a+b=4$.

Subiectul 3.

Prin mijlocul M al laturii [AC] a triunghiului ABC se duce paralela la latura [AB], iar prin B paralela la AC, notând cu D intersecţia acestora şi $\{E\}=AD\cap BC$. Să se demostreze că AB, ME şi CD sunt concurente.

Subiectul 4.

Să se arate că într-un patrulater convex raportul dintre suma pătratelor diagonalelor şi suma diagonalelor este mai mic decât semiperimetrul patrulaterului.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 7 la 0.
Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Iaşi
MATEMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 28 ianuarie 2006
Clasa a VIII-a

Subiectul 1. Aflaţi $a \in$ **N** dacă: $\frac{2a-3}{4} \in \left(\frac{a-2}{3}, \frac{a+4}{7}\right)$.

Subiectul 2.

a.)Dacă $x,\ y \in \boldsymbol{R}$ şi $x^2+y^2=2(x-2y+2)$, demonstraţi că $xy+2x-y \in [-7,11]$.

b)Fie $x,y,z \in \boldsymbol{R}$. Rezolvaţi ecuaţia: $x^2+y^2+z^2+19=4|x-1|+2|y-2|+2(x+2y+3z)$.

Subiectul 3.

Fie $ABCD$, $ABEF$ pătrate necoplanare şi $M, N \in (AB)$ iar P,Q mijloacele segmentelor (DM) respectiv (EN).Demonstraţi că $PQ \| (DCEF)$.

Subiectul 4.

Se consideră punctele necoplanare $A,\ B,\ C$ şi D.Fie $E \in CD$ astfel încât suma $AE+EB$ să fie minimă şi F intersecţia bisectoarei unghiului $\sphericalangle AEB$ cu dreapta AB. Arătaţi că $EF \perp CD$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 7 la 0.
Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul şcolar al Judeţului Iaşi
MATEMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 28 ianuarie 2006
CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie *x, y, z* numere reale pozitive cu $xyz = 1$. Să se arate că

$$\frac{1+xy}{1+z}+\frac{1+yz}{1+x}+\frac{1+xz}{1+y}\geq 3.$$

Subiectul 2. Să se afle numărul de soluţii naturale (x, y, z, t) ale ecuaţiei

$$9x+9y+9z+t=2000.$$

Subiectul 3. Pentru fiecare număr natural mai mare sau egal cu 4, arătaţi că interiorul oricărui patrulater convex se poate descompune în reuniune de *n* plăci în formă de triunghiuri dreptunghice, având interioarele disjuncte.

Subiectul 4. Se consideră triunghiul *MNP* şi fie punctele *T, S* astfel încât $\overrightarrow{NS}=3\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{PT}=3\overrightarrow{MT}$. Notăm $\{Q\}=PS\cap NT$. Să se arate că $\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 7 la 0.
Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul şcolar al Judeţului Iaşi
MATEMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 28 ianuarie 2006
CLASA A X-A

Subiectul 1. a.) Rezolvaţi ecuatia: $3^{\frac{-1}{x+2}}\cdot 2^{\frac{3x}{x^2+2}}=\frac{1}{6}$

b.) Rezolvaţi în ***R³*** sistemul: $\begin{cases} 3^x+4^x+5^x=5^x\cdot y \\ 3^y+4^y+5^y=5^y\cdot z \\ 3^z+4^z+5^z=5^z\cdot x \end{cases}$

Subiectul 2. Să se compare numărul $2006^{\log_{2005}2004}$ cu numărul $2004^{\log_{2006}2007}$.

Subiectul 3. Calculati suma:
arcsin(cos(arcsin(cos(arcsin(cos(arcsinx)))))) + arccos(sin(arccos(sin(arccos(sin(arccosx)))))),
unde x∈ [-1,1].

Subiectul 4. a.) Să se arate că în orice ΔPQR are loc inegalitatea:

$$sinP + sinQ + sinR \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

b.) Fie $a,b,c \in C^*$, astfel încât $|a|=|b|=|c|$.

Demonstraţi inegalitatea: $\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{b}{c}-\frac{c}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}-\frac{a}{b}\right|\leq 3\sqrt{3}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Iaşi
MATEMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locala, 28 ianuarie 2006
Clasa a XI – a

Subiectul I Se consideră şirul $x_n = \sqrt{n^2 + a} + bn + c, n \geq 1$, unde $a, b, c \in R$. Determinaţi a, b, c astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} (x_n)^n = e^2$.

Subiectul II Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale nenule cu proprietatea că:

$$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = 1; (\forall) n \geq 2.$$

a.) Să se demonstreze că şirul $b_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}, n \geq 2$ este constant.

b.) Dacă a_1, a_2, a_3 sunt în progresie aritmetică, să se arate că şirul $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

Subiectul III Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a.) Să se arate că dacă $X \in M_3(C)$ astfel încât: $AX = XA$, atunci $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $a, b, c \in C$.

b.) Să se demonstreze că ecuaţia $X^3 = A$ nu are soluţii în $M_3(C)$.

Subiectul IV

Fie $A, B \in M_2(R)$ cu proprietatea că există o matrice inversabilă $P \in \mathbf{M}_2(C)$ astfel încât $B = P^{-1}AP$.

1.) Dacă $P = R + i \cdot S$, unde $R, S \in M_2(R)$ să se arate că:

a.) $RB = AR$ şi $SB = AS$;

b.) $(R + t \cdot S)B = A(R + t \cdot S)$, $(\forall) t \in R$;

2.) Să se demonstreze că există o matrice inversabilă $Q \in M_2(R)$ astfel încât $B = Q^{-1}AQ$

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele se notează 0 – 7 puncte.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Iaşi
MATEMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locala, 28 ianuarie 2006
Clasa a XII – a

1. Determinaţi toate părţile stabile ale grupului $(Z_{2006}, +)$.
2. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu 2006 elemente.Demonstraţi că:

   a) $(\exists)\, x \in G \setminus \{e\}$ astfel încât $x^2 = e$ (e este elementul neutru din *G*).

   b)Funcţia $f : G \to G, f(x) = x^2$,nu este automorfism.
3. Să se calculeze: $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x^{12} - 1} dx$,x $\in (1, +\infty)$.
4. Există funcţii $f: R \to R$ care admit primitive pe R şi să satisfacă $(f \circ f)(x) = -x^3 + 1, (\forall) x \in R$**?**

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele se notează 0 – 7 puncte.