Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focșani, 28 ianuarie 2006
Clasa a VII-a - SOLUȚII

1. $\frac{a+2b}{6}=\frac{b+c}{7}=\frac{2c+a}{7}=t$

$\left.\begin{array}{l}a+2b=6t\\ a+2c=9t\end{array}\right\}$ => 2a + 2 (b + c) = 15t => 2a + 14t = 15t => a = $\frac{t}{2}$

b = $\frac{11t}{4}$, c = $\frac{17t}{4}$

a) 3a + b = $\frac{3t}{2}+\frac{11t}{4}=\frac{17t}{4}=c$

b) $\frac{2c^2}{289}=\frac{2}{289}\cdot\frac{289t^2}{16}=\frac{t^2}{8}$

$\frac{b^2}{121}+\frac{a^2}{4}=\frac{1}{121}\cdot\frac{121t^2}{16}+\frac{t^2}{16}=\frac{t^2}{16}+\frac{t^2}{16}=\frac{t^2}{8}$

c) DA!, t = 4, a = 2, b = 11, c = 17

2. i) n=12k+r, r$\in\{0,\ldots,11\}$

x=9k+$\frac{3r+2}{4}\in N\Rightarrow r\in\{2,6,10\}$

y=10k+$\frac{5r+1}{6}\in N\Rightarrow r\in\{1,7\}$

x,y$\in N\Rightarrow r\in\{2,6,10\}\cap\{1,7\}=\emptyset\Rightarrow x,y$ nu pot fi simultan numere naturale.

ii)x=9k+$\frac{3r+2}{4}\in N\Rightarrow r\in\{2,6,10\}$

y=10k+$\frac{5k+2}{6}\in N\Rightarrow r\in\{2,8\}$

x,y$\in N\Rightarrow r\in\{2,6,10\}\cap\{2,8\}=\{2\}\Rightarrow n=12k+2, k\in N$

3. a) NS||AB => ΔDNS $\approx\Delta$DBA => $\frac{DS}{DB}=\frac{DS}{DA}=\frac{3}{13}$ => DN=$\frac{3}{13}$DB …. (2p)

$\frac{NB}{NC}=\frac{BD+DN}{DC-DN}=\frac{BD+\frac{3}{13}BD}{3BD-\frac{3}{13}BD}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}=\frac{EA}{EC}$ => NE||AB (1p)

b) SM||DC => S,N,F coliniare daca APSE paralelogram (1p)

SM||DC=> $\frac{MC}{MA}=\frac{SD}{SA}=\frac{SD}{AD+SD}=\frac{\frac{13}{3}DA}{DA+\frac{3}{13}DA}=\frac{3}{16}$ (1p)

TS||AC => $\Delta TDS\approx\Delta CDA$ => $\frac{TD}{DC}=\frac{DS}{DA}=\frac{3}{13}$ => $TD=\frac{3}{13}DC$

PT||AC=> $\frac{PA}{PB}=\frac{TC}{TB}=\frac{DC+TD}{DB-TD}=\frac{DC+\frac{3}{13}DC}{\frac{1}{13}DC-\frac{3}{13}DC}=\frac{16}{3}*\frac{3*13}{4}=12$ (1p)

$\frac{PA}{PB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{MC}{MA}=12\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{16}=1 \Rightarrow M, N, P coliniare$

Dacã E∈ (AC) aî $\frac{EA}{EC}=\frac{4}{9}$ atunci APSE este paralelogram

4.

a) Din datele problemei rezultă că punctele A, P, D sunt coliniare. În plus, CD||AB şi BD||AC, de unde obținem congruența unghiurilor omoloage.

Vom arăta proporționalitatea laturilor:

Din $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=k$, obținem $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{k}{k+1}$, de unde $\frac{AM}{CD}=\frac{AN}{BD}=\frac{k}{k+1}$ (1). Să arătăm că avem $\frac{MP}{CP}=\frac{NP}{BP}=\frac{k}{k+1}$ (2).

Ducem MQ||AC şi NR||AB (Q∈ BN, R∈ MC). $\Rightarrow$ $\frac{MQ}{AN}=\frac{BM}{BA}$, de unde MQ=$\frac{AN\cdot BM}{BA}$ şi $\frac{MP}{CP}=\frac{MQ}{NC}=\frac{AN\cdot BM}{BA\cdot NC}=\frac{AN}{NC}\cdot\frac{BM}{BA}=k\cdot\frac{BM}{BA}$.

Dar $\frac{BM}{BA}=\frac{BA-AM}{BA}=1-\frac{AM}{BA}=1-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k+1}$. Aşadar, $\frac{MP}{CP}=k\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$.

Din (1) şi (2) rezultă proporționalitatea laturilor, deci patrulaterele sunt asemenea, cu raportul de asemănare egal cu $\frac{k}{k+1}$.

b) Din a), deducem $\frac{S_{AMPN}}{S_{DCPB}}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^2$.

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a VIII-a - SOLUȚII

1. a)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{1}{\sqrt{n=1}} <=> \frac{n+1}{\sqrt{n}(n+2)}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$<=> (n+1)^3 < n(n+2)^2 <=> 1 < n^2+n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n+2}\right) <=> \frac{1}{\sqrt{n+2}}<\frac{n+1}{\sqrt{n}(n+2)} <=> \sqrt{n(n+2)}<n+1 <=> 0<1$$

b) $\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{1}{5\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

……

$$\frac{1}{2006\sqrt{2004}}<\frac{1}{\sqrt{2004}}-\frac{1}{\sqrt{2006}}$$

(+)

$$S<1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2005}}-\frac{1}{\sqrt{2006}}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}<2$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{5\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$$

……

$$\frac{1}{2006\sqrt{2004}}-\frac{1}{\sqrt{2004}}-\frac{1}{\sqrt{2005}}$$

(+)

$$=> S>\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2005}}>1 <=> \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2005}}>\frac{2}{3} <=> 9(2007-2\sqrt{4010}>4\cdot 4010$$

$$<=> 2023>18\sqrt{4010}$$

(adevarat, deoarece $2023>18\cdot 100>18\sqrt{4010}$)

Deci [S] = 1

2.

$$\frac{m^2+m+1}{m^2+1}+2\frac{n^5+n+1}{n^5+1}\in N \Leftrightarrow 5\left(1+\frac{m}{m^2+1}\right)+2\left(1+\frac{n}{n^5+1}\right)\in N \Leftrightarrow 5\frac{m}{m^2+1}+2\frac{n}{n^5+1}\in N$$

.

Deci $m \geq 6$ si

$$n \geq 2 \Rightarrow 0<\frac{6m}{m^2+1}+\frac{2n}{n^5+1}<\frac{5m}{m^2}+\frac{2n}{n^5}=\frac{5}{m}+\frac{2}{n^4}\leq\frac{5}{6}+\frac{2}{16}=\frac{5}{6}+\frac{1}{8}=\frac{23}{24}\Rightarrow\frac{5m}{m^2+1}+\frac{2n}{n^5+1}\notin N$$

.

Deci m ≤ 5 sau n=1.

I.Daca n=1 $\Rightarrow \frac{5m}{m^2+1}+\frac{2}{2}\in N \Leftrightarrow \frac{5m}{m^2+1}\in N$

Dar $m \geq 5 \Rightarrow 0<\frac{5m}{m^2+1}<\frac{5m}{m^2}=\frac{5}{m}\leq 1 \Rightarrow \frac{5m}{m^2+1}\notin N \Rightarrow m \leq 4$

1. m=1 $\Rightarrow \frac{5m}{m^2+1}=\frac{5}{2}\notin N$

2. m=2 $\Rightarrow \frac{5m}{m^2+1}=\frac{5\cdot 2}{5}=2\in N$

3. m=3 $\Rightarrow \frac{5m}{m^2+1}=\frac{5\cdot 3}{10}=\frac{3}{2}\notin N$

4. m=4 $\Rightarrow \frac{5m}{m^2+1}=\frac{5\cdot 4}{17}=\frac{20}{17}\notin N$

II. Deci m$\leq 5 \Rightarrow$m$\in$ {1,2,3,4,5}.

1.m=1 $\Rightarrow \frac{5}{2}+\frac{2n}{n^5+1}\in N \Leftrightarrow 2+\frac{1}{2}+\frac{2n}{n^5+1}\in N \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{2n}{n^5+1}\in N$

dacă

$$n \geq 2 \Rightarrow 0<\frac{2n}{n^5+1}<\frac{2n}{n^5}=\frac{2}{n^4}\leq\frac{2}{2^4}=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{2n}{n^5+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{2n}{n^5+1}\notin N \Rightarrow n=1$$

nu verif.

2.m=2 $\Rightarrow 2+\frac{2n}{n^5+1}\in N \Leftrightarrow \frac{2n}{n^5+1}\in N \Rightarrow n=1$

3.m=1 $\Rightarrow \frac{3}{2}+\frac{2n}{n^5+1}\in N \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{2n}{n^5+1}\in N$ nu are soluții (analog 1)

4.m=4 $\Rightarrow \frac{20}{17}+\frac{2n}{n^5+1}\in N \Leftrightarrow \frac{3}{17}+\frac{2n}{n^5+1}\in N$

Deci

$$n\geq 2\Rightarrow 0<\frac{2n}{n^5+1}<\frac{1}{8}\Rightarrow \frac{3}{17}<\frac{3}{17}+\frac{2n}{n^5+1}<\frac{3}{17}+\frac{1}{8}<1\Rightarrow \frac{3}{17}+\frac{2n}{n^5+1}\notin N\Rightarrow n=1$$

care nu verifica

5.m=5 $\Rightarrow \frac{25}{26}+\frac{2n}{n^5+1}\in N$

Daca

$$n\geq 3\Rightarrow 0<\frac{25}{26}+\frac{2n}{n^5+1}<\frac{25}{26}+\frac{2n}{n^5}\leq \frac{25}{26}+\frac{2\cdot 3}{3^5}=\frac{25}{26}+\frac{2}{81}<1\Rightarrow \frac{25}{26}+\frac{2n}{n^5+1}\notin N\Rightarrow n=1$$

care nu verifica ,sau n=2 care nu verifica.Deci A={(2,1)}

3. a) MO l. m. în ΔVBD$\Rightarrow$MO||VB $\Rightarrow$MO||(VBC).

b) BD=a $\Rightarrow$ ΔBDC echilateral $\Rightarrow$BN$\perp$DC
VD$\perp$(ABCD) $\Rightarrow$VD$\perp$BN $\left.\right\} \Rightarrow BN\perp(VDC)$.

c) Fie DE$\perp$MN
BN$\perp$(VDC) $\Rightarrow$DE$\perp$BN $\left.\right\} \Rightarrow DE\perp(BMN)$.

AD$\cap$BN={S} $\Rightarrow$ O mijl. (AS).
În planul (ASE) ducem AP_1||DE
DE||(BMN) $\left.\right\} \Rightarrow AA_1\perp(BMN)$

D mijl. (AS) $\Rightarrow$ $AA_1=2\cdot DE$.

ΔDMN, MN=$\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow DE=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Deci $AA_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

4. a)Considerăm punctul A' de aceeaşi parte a planului cu punctele B',C',D' şi fie {0}=AC$\cap$BD.În trapezul BB'D'D,[OO_1] este linie mijlocie,$\Rightarrow OO_1=\frac{BB'+DD'}{2}=\frac{20+40}{2}=30cm$.În trapezul AA'C'C,[OO_2] este linie mijlocie ,$\Rightarrow OO_2=\frac{AA'+CC'}{2}=\frac{AA'+100}{2}$. Din coplanaritatea punctelor

A’,B’,C’,D’,deducem $OO_2=OO_1$; $\Rightarrow \frac{AA'+100}{2} = 30 \Leftrightarrow AA' = -40cm$. Deducem că punctul A’ se află în semispațiul opus celui în care se află B’,C’D’.

b)Fie $\{M\}=BC \cap B'C'$; în

$\Delta MCC', \Rightarrow \frac{MB}{Mc} = \frac{BB'}{CC'} \Rightarrow \frac{MC - BC}{MC} = \frac{BB'}{CC'} \Rightarrow \frac{MC - 48}{MC} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow MC = 60cm.$

Analog, $\{N\}=DC \cap D'C'$ şi din $\Delta NCC', \Rightarrow NC = 80cm.$

Intersecția planelor (A’B’C’) şi (ABC) este dreapta MN. Distanța de la punctul C la dreapta MN este egală cu înălțimea din C în triunghiul MCN, care are lungimea egală cu $\frac{MC \cdot NC}{MN} = \frac{60 \cdot 80}{\sqrt{60^2 + 80^2}} = 48cm$.

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a IX-a - SOLUȚII

1. Fie S_r mulțimea de soluții. Considerăm a<b.

(a) $S_r = \phi$ dacă $r < b - a$ din $r=|x - a| + |x - b| \geq |(x - a) + (b - x)|$
$S_r=[a,b]$, dacă $r= b - a$
S_r are două elemente, dacă $r > b - a$.

(b) $-1, 0, 1 \in S_r$ (r fiind valoarea comună a expresiilor din enunț) $\Rightarrow a \leq -1$ şi $1 \leq b \Rightarrow |a - b| \geq 2$.

2. Scriind vectorii în funcție de $\overline{OA_1}$ şi $\overline{OA_3}$, avem $\overline{OA_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{OA_1} + \overline{OA_3})$, etc.

$X_k \in Q_2$ (k=1, 2, …, 8) $\Rightarrow x_1 = x_5, x_2=x_6, x_3=x_7, x_4=x_8$.

3. Existența. Definim:

(*) $n= \min \{t\in N \mid 2 \bullet t! \in N\}$
$a_2 = [2_q]$ şi $a_k = [k! \bullet q] - k[(k - 1)! \bullet q]$; (k = 3, 4, …, n)

Atunci:

i) n > (din (*))
ii) $\frac{a_k}{k!} = \frac{x_k}{k!} - \frac{x_{k-1}}{(k-1)!}$ (k=3, 4, …, n) = $q = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k!}$ unde $x_t = [t! \bullet q]$ $(t \in N)$
iii) $(k - 1)!q = x = z + f$ ($z \in N$ şi $f \in (0, 1)$) $\Rightarrow kx = kz + kf < kz + k \Rightarrow$
$0 \leq a_k < k$ (k = 3, 4, …, n)

Unicitatea evident!

4.

(a) Considerãm:

i) --descompunerea $[0,1)=\left[0,\frac{1}{n}\right)\cup\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\cup...\cup\left[\frac{n-1}{n},1\right)$

ii) sumele $x_t=\{t\sqrt{2}\}$ (t=0,1,… n)

Relația cerutã are loc în baza principiului cutiei

(b) Din $|k\sqrt{2} - h| < \frac{1}{n}$ rezultã :

$\sqrt{2} - \frac{h}{k} < \frac{1}{nk} \leq \frac{1}{k^2}$, deci existã numere raționale care satisfac condiția din enunț

Dacã ar exista un numãr finit de numare raționale $q_1=\frac{h_1}{k_1}$, $q_2=\frac{h_2}{k_2}$,….. $q_t=\frac{h_t}{q_t}$ care sã satisfacã condiția din enunț, alegem un numãr,alegem un numãr natural m din

$\left(\frac{1}{8},\infty\right)$, unde $\sigma = \min\left\{\left|\sqrt{2} - \frac{h_i}{k_i}\right| : i = 1,2,....t\right\}$. Aplicând (a) numarului m se obține o contradicție

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a X-a - SOLUȚII

Subiectul 1:
z_k=cos t_k+i sin t_k , $t_k\in$ [0,2π), (k=1,2,…,8)
Re(z_k, $\overline{z_l}$)=cos(t_k-t_l)=cos$|t_k - t_l|$pt. k$\neq l$ din {1,2,…,8}
Aplicăm principiul cutiei numerelor t_k(k=1,2,…,8) şi descompunerii
$[0,2\pi)=\mathrm{U}\left[\frac{(j-1)\pi}{4},\frac{j\pi}{4}\right),1\leq j\leq 8$
Funcția cos este strict descrescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$relația
Subiectul 2:
Ecuația se poate scrie sub forma: 2^t=1+$\log_2$(1+t),unde t=cos 2a
Graficele functiilor f(t)=2^t şi g(t)=t+1,(t$\in R$) se intersectează în punctele (0,1) şi (1,2)
Funcția f este convexă şi graficul lui g este o dreaptă
$t\in(0,1)\Rightarrow 2^t<t+1\Rightarrow 2^t<t+1<1+\log_2(t+1)$
$t\notin[0,1]\Rightarrow 2^t>t+1>1+\log_2(t+1)$
$t\in\{0,1\}\Rightarrow a=\frac{\pi}{2}$
Subiectul 3
Injectivitatea.

Fie $z_1\neq z_2$ din C care satisfac condiția $f(z_1)=f(z_2)$. Din
$2|z_1-z_2|=\left||z_1|-|z_2|\right|\leq|z_1-z_2|$
urmează 2 ≤ 1, absurd

Surjectivitatea

Folosind forma algebrică standard, se demonstrează că, pentru orice w din C, există un z din C astfel încât w = f(z)

Subiectul 4
$\Delta=b^2-4c<0 => z_1,z_2\in C-R, z_2=\overline{z_1}$ şi $c\neq 0$
existența
$u_1=1, v_1=0$ şi
$u_n=\frac{z_1^n-z_2^n}{z_1-z_2}\in R, v_n=-z_1z_2\frac{z_1^{n-1}-z_2^{n-1}}{z_1-z_2}\in R(n\geq 2)$
(sau folosirea inductiei matematice)
Unicitatea
este o consecință a faptului că z$\in$ C-R
b) $\exists\ n\in N^*$ a.î.z^n=v_n $\Leftrightarrow\exists\ n\in N^*$a.î. u_n=0$\Leftrightarrow\exists n\in N^* a.$î.
$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=1\Leftrightarrow\frac{z}{|z|}=\cos\overline{qx}+i\sin\overline{qx}, unde\ \ q\in Q-Z$.

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a XI-a - SOLUȚII

1. Pentru orice k $\in$ N* avem

$a_{2k} = \dfrac{a_{2k-1}}{2k-1} + 1$, $a_{2k+1} = a_{2k} + \dfrac{1}{2k}$, $a_{2k+1} = \dfrac{a_{2k-1}}{2k-1} + 1 + \dfrac{1}{2k}$.

Avem $a_{2k+1} < 3$ oricare ar fi k $\in$ N*. Într-adevăr $a_1 = 1 < 3$, $a_2 = \dfrac{a_1}{1} + 1 < 3$, $a_3 = a_2 + \dfrac{1}{2} < 3$. Dacă $k \geq 2$ atunci $a_{2k+1} < \dfrac{3}{2k-1} + 1 + \dfrac{1}{2k} < \dfrac{3}{3} + 1 + \dfrac{1}{4} < 3$.

Din $a_{2k} = \dfrac{a_{2k-1}}{2k-1} + 1$ şi $a_{2k-1} \in (0,3)$ rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$. Acum din $a_{2k+1} = a_{2k} + \dfrac{1}{2k}$ rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

2.Fie $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x} = l \in R.$

Conform teoremei de caracterizare a limitei unei funcții cu ajutorul şirurilor avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{\ln n} = l.$ (1)

şi $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(n+1) - f(n)) = 2l.$ (2)

Deoarece $\dfrac{f(n+1) - f(n)}{\ln(n+1) - \ln n} = \dfrac{n(f(n+1) - f(n)}{\ln(1+\frac{1}{n})^n}$,

deducem, folosind (2), că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n+1) - f(n)}{\ln(n+1) - \ln n} = 2l$,

de unde, conform lemei lui Stolz-Cesàro, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{\ln n} = 2l.$

Din (1) şi (3), folosind unicitatea limitei unui şir de numere reale, obținem

$2l = l$, $l = 0$, adică $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x} = 0.$

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Din $B^k = 0$ rezultă că det B = 0 şi cum

$B^2 - (x+w)B - I_2 \det B = 0$ rezultă că $0 = B^k = (x+w)^{k-1}B$. Dacă $x + w \neq 0$ rezultă B = 0 şi evident det (A+B) = det A. dacă x + w = 0 atunci

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ cu $x \neq 0$, $zy \neq 0$ şi $z^2 + yz = 0$

Condiția AB = BA => cy = bz, (a – d)y = 2 b x, (a – d)z = 2cx

Avem

$(I_2 + B)^2 - 2(I_2 + B) + \delta I_2 = 0 \Rightarrow S = 1$

deci proprietatea din enunț este adevarată pentru A = I_2

Dar |A| $\neq$ 0, atunci A + B = A $(I_2 + A^{-1}B)$ şi $(A^{-1}B)^2 = C$ şi deci

|A + B| = $|\alpha| \cdot |I_2 + A^{-1}B| = |A| \cdot 1 = |A|$

Cazul |A| = 0. Fie f : R -> R, f(x) = $|I_2x + A|$ şi g : R -> R, g(x) = $\left|I_2 x + A + B\right|$.se observă că f şi g sunt funcţii polinomiale de gradul 2. Cum:
g(x) = $\left|I_2 x + A + B\right| = \left|I_2 x + B\right| = f(x)$ pentru o infinitate de x$\in$ R, rezultă că g = f şi în particular $\left|A + B\right| = g(0) = f(0) = \left|A\right|$

4. Există 3^4 matrice pătrată de ordin 2 cu coeficienţi egali cu -1,0 sau 1.Rezultă că în şirul

$$A, A^2, \ldots\ldots, A^k, \ldots..$$

avem termeni egali .Există deci s,t$\in N^*$ $1 \le s < t$ astfel încât $A^s=A^t$.Cum det$A \neq 0$,există A^{-1}şi înmulţind egalitatea $A^s=A^t$ cu $A^{-s}= \underbrace{A^{-1} A^{-1} \ldots\ldots A^{-1}}_{\text{de s ori}}$,obţinem $A^{t-s}=I_2$,deci $A^m=I_2$

unde m=t-s$\in N^*$.

(2) Fie A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu a,b,c,d $\in \{-1,0,1\}$ a.î. $A^3=I_2$.Avem detA $\in Z^*$ şi $(\det A)^3=\det I_2=1$.

Rezultă că detA=1,deci $a \cdot d - b \cdot c = 1$ .Cum a,b,c,d$\in \{-1,0,1\}$ rezultă că $a \cdot d$ =0 sau $b \cdot c$ =0.

Presupun că d=0.Atunci $b \cdot c$ =-1 deci

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ cu } a \in \{-1,0,1\}$$

Când a=-1 ,A=$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$A^2$=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,$A^3$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=$I_2$

Deci m_A=3.Aşadar găsim $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ cu m_B=2.Atunci

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{si } m_C=6.$$

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA 2006"
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a XII-a - SOLUȚII

1. $-1 \le \dfrac{2x}{1+x^2} \le 1 \Leftrightarrow -1 - x^2 \le 2x \le 1 + x^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 + 2x = (x + 1)^2 \ge 0.$

Ideea este de a calcula prin părți luând primitiva sub forma $\int \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} \cdot (x)' dx$

(are sens $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$, v. 1 !). Din nefericire, f nu este derivabilă şi va trebui să „împărțim" problema pe subintervale. Mai precis:

a) Studiul derivabilității

Avem schema

$R \xrightarrow{u} [-1, 1] \xrightarrow{g} R$

$u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ $\quad g(f) = \arcsin t$ $\quad f = g \circ u.$

Funcția u este derivabilă. Funcția g este derivabilă pe $(-1, 1)$ şi nu este derivabilă în $t = 1$ şi $t = -1$. Avem $t = \dfrac{2x}{1+x^2} = u(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ şi $t = \dfrac{2x}{1+x^2} = u(x) = -1 \Leftrightarrow x = -1$. Cu teorema lanțului, rezultă că f este derivabilă pe $R \setminus \{-1, 1\}$, urmând ca, în punctele $x = 1$ şi $x = -1$ să studiem separat. Pentru $x \in R \setminus \{-1, 1\}$, avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2 \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}$$

adică: $$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2}, & \textit{dacă} \quad x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & \textit{dacă} \quad x \in (-1,1) \end{cases}$$

Cu condiția formulelor creşterilor finite, derivatele laterale în -1 şi 1 se calculează astfel (f nu are derivată în 1 şi -1):

$$f'_s(-1) = \lim_{x\uparrow -1} -\frac{2}{1+x^2} = -1 \;;\; f'_d(-1) = \lim_{x\downarrow -1} \frac{2}{1+x^2} = 1 \;;\; f'_s(1) = 1 \;;\; f'_d(1) = -1.$$

b) În consecință, vom integra separat prin părți pe fiecare din intervalele $I_1 = (-\infty,-1)$, $I_2 = (-1, 1)$ şi $I_3 = (1, \infty)$, obținând, respective, primitivele F_1, F_2, F_3, pe care le vom „lipi".

Pe $I_1=\left(-\infty,-1\right)$,avem $\int \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} \cdot (x)' dx$ calculate cu schema

$u(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ $\quad v'(x)=1$

u'(x)=$-\dfrac{2}{1+x^2}$ v(x)=x

$\int \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ dx =x arcsin$\dfrac{2x}{1+x^2}+\int\dfrac{2x}{1+x^2}$dx= x arcsinx+$\int\dfrac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx = x\arcsin x+\ln(1+x^2)$.

Aşadar,există $C_1 \in$ R aşa că pentru orice x$\in(-\infty,-1)$:

$F_1(x)=a(x)+b(x)$ si $F(x)=F_1(x)+C_1$

Aici a(x)=$x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, b(x)=ln(1+x^2),$F_1$:(-∞,-1)$\to$R are calitatea că $F_1'(x)=f(x)$ pentru $x\in(-\infty,-1)$ si F:R$\to$R este o primitiva a lui f.

Consideraţii similare se fac pe [-1,1) şi [1,∞) (de exemplu pe [-1,1), $\int\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ dc se calculează cu schema : u(x)=arcsin$\dfrac{2x}{1+x^2}$ v'(x)=1

u'(x)=$\dfrac{2}{1+x^2}$ v(x)=x etc)

Obţinem, în concluzie, existenţa a trei constante reale C_1,C_2,C_3 aşa că

$$F(x)=\begin{cases} a(x)+b(x)+C_1, dacă & x\in(-\infty,-1)\\ a(x)-b(x)+C_2, dacă & x\in[-1,1)\\ a(x)+b(x)+C_3, dacă & x\in[1,\infty)\end{cases}$$

Deoarece F este continuă ,obţinem

F(-1)=lim F(x)=a(-1)+b(-1)+C$_1$=$\dfrac{\pi}{2}+\ln 2+C_1=\lim\limits_{x\to-1}$ F(x)=a(-1)-b(-1)+C$_2$=$\dfrac{\pi}{2}-\ln 2+C_2$

Rezultă $\dfrac{\pi}{2}+\ln_2+C_1=\dfrac{\pi}{2}-\ln_2+C_2 \Rightarrow C_2=C_1+2\ln_2$

La fel:

$$F(1)=\lim_{x\uparrow 1}F(x)=a(1)-b(1)+C_2=\frac{\Pi}{2}-\ln 2+C_2=\lim_{x\downarrow 1}F(x)=a(1)+b(1)+C_3=\frac{\Pi}{2}+\ln 2+C_3$$

Rezultă $\dfrac{\Pi}{2}-\ln 2+C_2=\dfrac{\Pi}{2}+\ln 2+C_3 \Rightarrow C_3=C_2-2\ln 2=C_1+2\ln 2-2\ln 2=C_1$

Notăm C_1 = C şi primitiva are forma:

$$F(x)=\begin{cases} a(x)+b(x)+C, -\infty<x\le -1\\ a(x)-b(x)+C+2\ln 2, -1<x\le 1\\ a(x)+b(x)+C, 1<x<\infty\end{cases}$$

2. Avem F(2x)-F(x) = x(ln x + a), $\forall x \in (0,\infty)$
Derivând, avem cum F : $[0,\infty)$ este o primitivă
2f(x) – f(x) = ln x + a + 1, $x \in (0,\infty)$
Fie b = a + 1. Avem egalitățile

$$2f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=\ln\frac{x}{2}+b \qquad /1$$

$$2f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\ln\frac{x}{2^2}+b \qquad /\frac{1}{2}$$

…

…

$$2f\left(\frac{x}{2^n}\right)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=\ln\frac{x}{2^{n+1}}+b \qquad /\frac{1}{2^n}$$

care înmulțite respectiv cu 1, ½, … ,1/2^n şi adunând, obținem

$$2f(x)-\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}\right)\ln x-\left(1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{n+1}{2^n}\right)\ln 2+\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}\right)$$

sau

$$f(x)=\frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)+\left(1-\left|\frac{1}{2}\right|^{n+1}\right)(\ln x+6)-\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+...+\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$$

Pentru calculul sumei $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+..........+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n+1}k\frac{1}{2^k}$,observăm

$$\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot x^k=x\cdot\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot x^{k-1}=x(1+x+.......+x^{n+1})'=x\left(\frac{x^{n+2}-1}{x-1}\right)'=x\frac{(n-12)x^{n+1}(x-1)-x^{n+2}+1}{(x-1)^2}$$

Şi luând x=$\frac{1}{2}$ avem

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+2)\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{n+2}}+1}{\frac{1}{4}}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$$

Trecând (*) la limita cu n$\to\infty$,avem f(x)=0f(0)+$\ln_x$+b-2$\ln_2$=$\ln_x$+a+1-2$\ln_2$.

Observație Se ştie că $\int \ln_t dt = t\ln_t - 1$

$$\int i\cdot dt = ct$$

f(t)=$\ln_t$+c

$$\Rightarrow F(2x)-F(x)=2x\ln_{2x}-1+2cx-x\ln_x+1-cx=x\ln_x+2x\ln_2+cx=x(\ln_x+c+2\ln_2)$$

şi este suficient să luăm c=a-2$\ln_2$ si deci f(x)=$\ln_x$+a-2$\ln_2$.

3. Daca A, B $\in G$, atunci det(AB)=detA*detB$\neq 0$ si cum (AB)I=A(BI)=A(IB)=A(IB)=(IA)B=I(AB) avem AB$\in$ G.Rezultã cã înmultirea matricelor este lege de compoziție pe G, evident asociativã, admițând ca element neutru pe I_2 căci I_2I=II_2 si det I_2=1$\neq$0. Daca A$\in$ G, atunci; detA^{-1} = $\frac{1}{\det A}\neq 0$ şi

înmulțind egalitatea AI=IA la stanga şi la dreapta cu A^{-1} obținem $IA^{-1}=A^{-1}I$, deci $A^{-1}\in G$. Conchidem ca`$(G,\cdot)$ este grup.

Pentru $A\in M_2(R)$ avem $A\in G \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu $a,b \in R$ $a^2 + b^2 \neq 0$ şi se verificã imediat cã aplicând $f : C^* \longrightarrow G$.Cum pentru orice $z\in C^*$ este gr. abelian aceeaşi propr. o are şi grupul G. Cum pentru orice $z\in C^*$ $z=a+bi$ exista 2 nr. complexe distincte x+iy astfel încat $(x+iy)^2=z$, aceeasi proprietate este adevărată in G pt. $f(z)=A_d$