Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA 2006"
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a VII-a

1. Dacă $\frac{a+2b}{12}=\frac{b+c}{14}=\frac{2c+a}{18}$, atunci:

a) c = 3a + b

b) $\frac{2c^2}{289}=\frac{b^2}{121}+\frac{a^2}{4}$

c) pot fi a, b, c, simultan, numere prime?

Enache Pătraşcu

2. Fie numerele x $=\frac{3n+2}{4}$ şi y $=\frac{5n+a}{6}, n\in \mathbb{N}$.

a) Dacă a = 1, să se arate că x şi y nu pot fi, simultan, numere naturale.

b) Dacă a = 2, să se determine $n\in \mathbb{N}$, astfel încât x şi y să fie, simultan, numere naturale.

c)

Enache Pătraşcu

3. Fie triunghiul ABC, D $\in$ (BC), D $\in$ (AS), astfel încât $\frac{DB}{DC}=\frac{1}{3}$ şi $\frac{DS}{DA}=\frac{3}{13}$. Paralelele prin S la BC, AB, AC intersectează AC, BC, AB în M, N, P.

a) Dacă E $\in$ (AC), astfel încât $\frac{EA}{EC}=\frac{4}{9}$, atunci APSE este paralelogram.

b) Să se arate că punctele M, N, P sunt coliniare.

Enache Pătraşcu

4. În triunghiul ABC, cu M pe (AB) şi N pe (AC), astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=k$, notăm cu P intersecția dreptelor BN şi CM.

a) Să se arate că patrulaterele AMPN şi DCPB sunt asemenea, unde D este simetricul lui A în raport cu mijlocul lui (BC)

b) Să se calculeze $\frac{S_{AMPN}}{S_{DCPB}}$

(Două poligoane sunt asemenea dacă au laturile respectiv proporționale şi unghiurile cuprinse între laturi respectiv proporționale, congruente)

Constantin Apostol

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a VIII-a

1.Să se arate că:

a) $\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{(n+2)\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}, \forall n\in N^{*}$

b) $\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{5\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2006\sqrt{2004}}\right]=1$, unde prin [a] înțelegem partea întreagă a numărului a.

Enache Pătraşcu

2.Să se determine A={(m,n)$\in N^* x N^* | 5\cdot\frac{m^2+m+1}{m^2+1}+2\cdot\frac{n^5+n+1}{n^5+1}\in N$ }

Gabriel Daniilescu

3.Fie rombul ABCD în care AB=a,AC=a$\sqrt{3}$ şi VD$\perp$(ABCD),cu VD=a. Dacă M,N sunt mijloacele segmentelor (VD), respectiv (CD), atunci:
a)MO||(VBC), AC$\cap$BD={0}.
b)BN$\perp$(VCD).
c)Să se calculeze d(A,(BMN))

Enache Pătraşcu

4.Pe planul pătratului ABCD cu latura de 48 cm ,de aceeaşi parte a planului, în punctele B,C,D se ridică perpendicularele BB’=20cm, CC’=100cm, DD’=40cm.
a)Să se determine, pe perpendiculara în A pe planul pătratului, punctul A’,astfel încât punctele A’,B’,C’,D’ să fie coplanare.
b)Să se determine distanța de la punctul C la intersecția planelor (A’B’C’) şi (ABC).

Constantin Apostol

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a IX-a

1)Fie a şi b două numere reale distincte.Se cere:
(a) Sã se rezolve ecuația: $| x - a | + | x - b | = r$, unde r este un număr real oarecare.
(b)Sã se arate cã $|a - b | \geq 2$, dacă au loc relațiile:

$$| a - 1 | + | b - 1 | = | a | + | b | = | a + 1 | + | b + 1 |.$$

Bogdan Enescu

2)Fie $A_1, A_2,\dots,A_8$ vârfurile unui octogon regulat cu centru în O şi numerele raționale $x_1,x_2,\dots x_8$ astfel încât :

$$x_1\overrightarrow{OA_1} + x_2\overline{OA_2} + \dots + x_8\overline{OA_8} = 0$$

Sã se arate cã: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8$

***

3) Sã se arate cã pentru orice q din $Q \cap (0 , 1)$ existã numere întregi unice n, $a_2, a_3, \dots a_n$ astfel încât :

$$q=\frac{a}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\dots+\frac{a_n}{n!},\ n>0,\ 0\leq a_k<k\ (k = 2, 3 , \dots , n - 1)\text{ şi } 0<a_n<n.$$

***

4)Folosind numerele reale $x_t=t\sqrt{2}-[t\sqrt{2}]$ ($t\in N$), arãtati cã pentru orice n>1, existã douã numere întregi h şi k care satisfac relațiile:
$0<k\leq n$ si $|k\sqrt{2}-h|<\frac{1}{n}$.

Este posibil sã existe doar un numar finit de numere raționale $\frac{h}{k}$ ($k,h\in N^*$) care satisfac relația : $|\sqrt{2}-\frac{h}{k}| < \frac{1}{k^2}$?

***

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a X-a

1.Fie $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_8 \in C$,cu $|z_1|=|z_2|=\ldots\ldots=|z_8|=1$.
Să se arate că există $k,l, 1 \le k < l \le 8$ astfel încât $\mathrm{Re}(z_k \overline{z_l}) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bogdan Enescu

2.Să se afle $a \in (0, \pi)$ care verifică $2^{-1+\cos 2a} = 1+\log_2(\cos a)$.

***

3.Să se arate că funcția $f : C \to C, f(z) = 2z + |z|$ este bijectivă.

***

4.Fie z o rădăcină a ecuației $x^2+bx+c=0$,
unde b şi c sunt numere reale care satisfac condiția $b^2<4c$.Să se arate că:
(a)Pentru orice n din N*,există două numere reale unice u_n şi v_n astfel încât
$z^n=u_n z+v_n$.
(b)Există un n din N*astfel încât $z^n=v_n$ dacă şi numai dacă $\frac{z}{|z|} = \cos q\pi + i \sin q\pi$,

unde $q \in Q \setminus Z$.

***

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a XI-a

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_1=1$ şi $a_{n+1}=\begin{cases} \frac{a_n}{n}+1, & \textit{dacă} \quad n \quad \textit{este} \quad \textit{par} \\ a_n+\frac{1}{n}, & \textit{dacă} \quad n \quad \textit{este} \quad \textit{impar}. \end{cases}$

Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Laurențiu Panaitopol

2. Fie f: R $\rightarrow$ R pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\ln x}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))$ există şi sunt finite.

Să se arate că dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=2\lim\limits_{x\to\infty}x(f(x+1)-f(x))$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=0$

Radu Miculescu

3. Fie o matrice $B\in M_2(R)$ pentru care există $k\in N^*$ astfel încât $B^k=0$. Dacă $A\in M_2(R)$ este astfel încât AB=BA, atunci det (A+B)=det A.

***

4. Fie $A\in M_2(R)$ astfel încât $\det A\neq 0$ şi A^k are toți coeficienții în mulțime {-1, 0, 1} oricare ar fi $k\in N^*$.

(a) Arătați că există $m\in N^*$ astfel încât $A^m=I_2$ (notăm cu m_A cel mai mic număr $m\in N^n$ astfel încât $A^m=I_2$).
(b) Indicați două matrice $A, B\in M_2(R)$ şi o matrice $C\in M_4(R)$ cu proprietatea de la pct. (a) astfel încât $m_A=3$, $m_B=2$ şi $m_C=b$.

Laurențiu Panaitopol

Concursul Interjudețean de Matematică “UNIREA 2006”
Focşani, 28 ianuarie 2006
Clasa a XII-a

1.Să se calculeze o primitivă a funcției f : R → R dată de f (x) = $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Ion Chițescu

2. Să se determine o funcție continuă f : (+ ,∞) → R ştiind că F (2x) – F (x) = x (ln x + a), $\forall x \in (0,\infty)$, unde F: (+ ,∞) → R este o primitivă a funcției f iar a ∈ R.

Laurențiu Panaitopol

3. Fie I=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$∈ M_2 (R) si G = {A∈ M_2 (R) | A I = I A şi detA $\neq 0$}.

(a) Arătați că G este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor, izomorf cu grupul (C*,•)

(b) Pentru orice A ∈ G, ecuația X^2 = A are două soluții distincte în G.

***

4. Fie (G, •) un grup cu elemental neutru e, p>2 un număr prim, iar a, b ∈ G, a, b ≠ e astfel încât $a^p = b^2 = e$ şi b a = a^{p-1} = b. Să se arate:

(a) Dacă i, j ∈ Z atunci $a^i b^j$ = e <=> p | i şi 2 | j.

(b) H = { $a^i b^j$ | i, j ∈ Z } este subgrup de ordin 2p al lui G.

***