CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU MYLLER”

Ediţia a V-a

Iaşi, 24 martie 2007

Soluţii – test pentru seniori

Subiectul 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia

$$x^3 - y^3 = 2xy + 7.$$

Soluţie. Fie $x - y = d, xy = p$. Ecuaţia devine $d^3 + 3dp = 2p + 7$, de unde

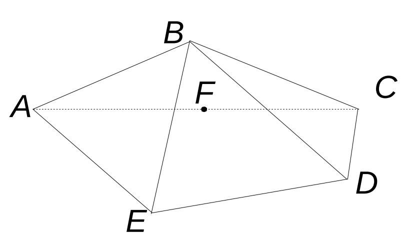
$$27p = \frac{27(7-d^3)}{3d-2} = \frac{181}{3d-2} - 9d^2 - 6d - 4.$$

Rezultă că $3d - 2 = \pm 1$ sau $3d - 2 = \pm 181$. În final rămâne doar soluţia $d = 1, p = 6$, de unde $x = 3, y = 2$ sau $x = -2, y = -3$.

Subiectul 2. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{2n}$. Demonstraţi că există o infinitate de numere prime care nu divid nici un termen al şirului.

Soluţie. Este suficient să arătăm proprietatea pentru şirul dat de $y_n = a^{2n+1} - 1$. Din relaţia $(a-1)(a+1)(a^2+1)\ldots(a^{2^n}+1) + 2 = a^{2^{n+1}} + 1$ rezultă că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ (eventual, cu excepţia unei valori s pentru care $a^{2^s} + 1$ este putere a lui 2) există un număr prim impar p_n care divide $a^{2^n} + 1$ şi nu divide $a - 1$ şi $a^{2^m} + 1, m \neq n$. Deducem că $a^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p_n}$. Dacă $a^{2t+1} \equiv 1 \pmod{p_n}$ pentru un anumit t, obţinem $a \equiv 1 \pmod{p_n}$, fals.

Subiectul 3. Pentagonul convex $ABCDE$ are proprietăţile: $AB = BC$, $m(\angle ABE) + m(\angle CBD) = m(\angle DBE)$ şi $m(\angle AEB) + m(\angle BDC) = 180°$. Demonstraţi că ortocentrul triunghiului BDE se află pe dreapta AC.



Soluţie. Fie F al doilea punct de intersecţie al dreptei AC cu cercul circumscris triunghiului ABE. Din ultima parte a ipotezei rezultă că patrulaterul $BCDF$ este inscriptibil, deci $\angle BDF \equiv \angle BCF$. Astfel, $m(\angle BDF) + m(\angle EBD) = m(\angle ACB) + m(\angle EBD) = \frac{1}{2}(m(\angle ACB) + m(\angle CAB)) + \frac{1}{2}m(\angle ABC) = 90^\circ$, deci $DF \perp BE$. Analog $EF \perp BD$, q.e.d.

Subiectul 4. Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Demonstraţi că, oricum am colora cu două culori o mulţime de $\frac{n^3+5n}{6}$ numere întregi consecutive, există o submulţime monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ astfel încât

$$1 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \ldots \leq a_n - a_{n-1}.$$

Soluţie. Putem considera că numerele sunt $1, 2, \ldots, \frac{n^3+5n}{6}$, iar cele două culori sunt A, B. Demonstrăm prin inducţie că, pentru orice $n \geq 2$, există o submulţime monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ astfel încât

$$1 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \ldots \leq a_n - a_{n-1} \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1 \overset{\text{not}}{=} d_n.$$

Pentru $n = 2$, proprietatea se verifică imediat.

Presupunem acum proprietatea adevărată pentru n şi considerăm o mulţime de $\frac{(n+1)^3+5(n+1)}{6}$ numere consecutive. Conform ipotezei de inducţie, există printre primele $\frac{n^3+5n}{6}$ numere o submulţime monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, colorată, de exemplu, cu A, astfel încât

$$1 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \ldots \leq a_n - a_{n-1} \leq d_n.$$

Considerăm numerele

$$a_n + d_n, a_n + d_n + 1, \ldots, a_n + d_n + n.$$

Dacă toate aceste $n+1$ numere au culoarea B, proprietatea este verificată şi pentru $n+1$.

Dacă unul dintre ele are culoarea A, îl notăm cu a_{n+1} şi avem

$$d_n \leq a_{n+1} - a_n \leq d_n + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

În plus,

$$a_{n+1} \leq \frac{n^3+5n}{6} + d_n + n = \frac{n^3+5n}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{(n+1)^3+5(n+1)}{6},$$

deci mulţimea $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ îndeplineşte condiţia cerută.