OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17-02-2007
CLASA a - V – a

1. a) Arătaţi că numărul $A = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2007}$ este divizibil cu 15.

   b) La un concurs de matematică au participat elevi din clasele a V-a A, a V-a B şi a V-a C. 27 de elevi nu sunt din clasa a V-a C, iar 39 de elevi nu sunt din clasa a V-a A. Numărul elevilor din clasa a V-a A este de două ori mai mic decât numărul elevilor din clasa a V-a C. Câţi elevi au participat din fiecare clasă?

2. Se consideră şirul de numere naturale: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ………
   a) observând o regulă de formare a termenilor acestui şir, aflaţi următorii doi termeni ai şirului;
   b) dacă p este termenul de pe locul 2008, demonstraţi că p+1 este pătrat perfect, iar $p - 2^{2007}$ nu este pătrat perfect.

3. Să se determine numerele de forma $\overline{abc}$ ştiind că:
$$\overline{abc} + 11(a+b+c) = \overline{cba}$$

G.M. 10/2006, E:13283

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17-02-2007
CLASA a - VI – a

1. Determinaţi numărul $\overline{xy}$ ştiind că are loc egalitatea:
$$\overline{xy0} + \overline{xy2} + \overline{xy4} = \overline{xy} + 2007$$

G.M. 10/2006, E:13288, enunţ modificat

2. a) Demonstraţi că : $\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

b) Demonstrați inegalitatea: $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+.....+\frac{1}{21\cdot 22\cdot 23}<\frac{1}{4}$

c) Dacă $a_1, a_2,.....a_n$ sunt direct proporționale cu

$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}, ..., \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ şi $a_{n-1}\cdot a_n=(n-1)(n+2)$,

atunci $a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}=a_6^{\ 2}$ şi $a_6^{\ 2}+a_{13}^{\ 2}=a_{14}^{\ 2}$.

3. Unghiurile în jurul unui punct O, AOB, BOC, COA, au respectiv bisectoarele [OX, [OY, [OZ, iar $m(\sphericalangle XOY)$, $m(\sphericalangle YOZ)$, $m(\sphericalangle XOZ)$ sunt direct proporționale cu 5, 6, 7.
   a) aflați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COA;
   b) aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor BOX şi COZ.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17-02-2007
CLASA a - VII – a

1. Să se calculeze:

a) $S=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+.....+\frac{1000}{999}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{999}\right)$

b) $\left[1,(1)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+.....+\frac{1}{9\cdot 10}\right)-1\right]^{2007}$

c) aflați x, y şi z ştiind că $\frac{5}{x+y}=\frac{10}{x+z}=\frac{15}{y+z}$ şi

$(x+y)(x+z)(y+z)=6$

2. Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât numărul $\frac{2n^2+13n+26}{n+3}$ să fie întreg.

3. Determinați un punct M pe segmentul (AB) cu măsura de 9 cm, astfel încât aria pătratului de perimetru AM să fie de 4 ori mai mare decât aria pătratului de perimetru MB.

G.M. 10/2006, C: 3074

4. În acelaşi semiplan determinat de dreapta AB se consideră punctele M şi N astfel încât $AM \perp AB, BN \perp AB$ ($AM \neq BN$). Punctul P este simetricul punctului M față de punctul A, iar O punctul de intersecție al dreptelor PN şi AB. Dacă paralela prin O la BN intersectează pe AN în K, să se demonstreze:
   a) $OK = \dfrac{AP \cdot BN}{AP + BN}$;
   b) $[OK$ este bisectoarea unghiului MON;
   c) punctele M, K, B sunt coliniare.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17-02-2007
CLASA a - VIII – a

1. a) Un întreg pozitiv n este cu 1 mai mare decât un pătrat perfect. Dovediți că 2n este suma a două pătrate perfecte.
   b) Să se calculeze $(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2\sqrt{15}+3}} \cdot \sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{2\sqrt{15}+3}}$

2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:
$$x^2 + xy - 2y^2 - x + y = 6$$
   b) Determinați numerele naturale n$\in$N astfel încât $\sqrt{4n^2 - 12n + 20} \in$N.

3. Pe planul trapezului dreptunghic ABCD cu bazele AB=2 dm, CD=6 dm şi înălțimea $AD = 4\sqrt{3}$ dm se ridică perpendiculara DE, DE=8 dm. Fie $M \in (BC)$ astfel încât BM=2 dm.
   a) aflați lungimea segmentelor AE şi ME.
   b) arătați că $AM \perp (DEM)$.

4. Fie cubul ABCDA'B'C'D', M simetricul punctului A față de punctul B, N piciorul perpendicularei dusă din C pe [BD'] şi P centrul pătratului ADA'D'. Arătați că punctele M, N, P sunt coliniare.
G.M. 11/2006, E: 13321

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17-02-2007
CLASA a - IX – a

1. Fie x, y, z, t$\in(0, \infty)$. Să se arate că:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{t^2}+\frac{t^2}{x^2}\geq\frac{t-y}{x}+\frac{x-z}{y}+\frac{y-t}{z}+\frac{z-x}{t}+4$$

G.M. 11/2006, 26660

2. Se dă pătratul $ABCD$ şi punctele M,N,P situate pe laturile $(AB),(BC)$ respectiv (DA) astfel ca: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. Se consideră punctele E *şi* F astfel încât $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *şi* $\overrightarrow{PF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Să se arate că punctele E,F,G sunt coliniare , G fiind centrul de greutate al triunghiului BMN.

b) Să se calculeze AG', în funcție de $a=AB$, G' fiind centrul de greutate al triunghiului DMN.

3. Fie numerele $a_1, a_2,........a_n$ astfel încât pentru orice n, natural, avem: $a_1+a_2+.....+a_n=\alpha n^2+\beta n$. Să se demonstreze că numerele date sunt în progresie aritmetică. Să se determine, în funcție de α şi β, primul termen şi rația.

4. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului definit prin $x_0=x_1=0$, $3x_{n+2}=a+x_{n+1}+x_n^2$, $\forall\ n\geq 0$ unde $a\in[0, 1)$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17-02-2007
CLASA a - X – a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\log_2 x+\log_{2x}4=\log_{4x}8+\log_{16}8x$.

G.M. 11/2006, 26664

2. Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in (1, \infty)$. Să se demonstreze inegalitatea pentru.

$$\frac{\log_{x_1} x_2}{x_3} + \frac{\log_{x_2} x_3}{x_4} + ... + \frac{\log_{x_{n-1}} x_n}{x_2} + \frac{\log_{x_n} x_1}{x_1} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n},$$

$$n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Demonstrați că dacă are loc relația

$$\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 3i\sqrt{3} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1},\ \text{atunci } z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

4. Să se determine coordonatele triunghiului ABC dacă A(4, 5) şi dacă ecuațiile medianelor duse din B şi respectiv C sunt $4x - 5y - 3 = 0$, respectiv $x + y - 6 = 0$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17-02-2007
CLASA a - XI – a

1. Să se determine, discutând după parametrii reali a, b, c limita:

$$\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{x+1} + b\sqrt{4x+1} + c\sqrt{9x+1}\right).$$

2. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$ ştiind că: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{2^{2k-1} + 9 \cdot 2^{k-1} + 9}$.

G.M. 11/2007, 26667

3. Fie ecuația $x^3 - x^2 + ax + b = 0, cu\ a, b, c \in \mathbb{C}$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

Calculați determinantul: $\begin{vmatrix} -x_1 & x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 & -x_2 & x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 & x_1 + x_3 & -x_3 \end{vmatrix}$

4. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a+d=2,\ bc=-(a-1)^2$ şi

$A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Arătați că: a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+d_k)=2n$;

b) $\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k = -\left[\frac{n(n+1)(a-1)}{2}\right]^2$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17-02-2007
CLASA a - XII – a

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. Considerăm mulțimea

$$G=\left\{ A(x)=\begin{pmatrix} 1 & ax & abx^2+cx \\ 0 & 1 & 2bx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

Demonstarți că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

G.M. 11/2006, 26676

2. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n \int_{-1}^{0} \frac{x^3+5x^2+7x+2}{(x+2)^{n+1}}\,dx$.

3. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\cdot F(n-x)=e^x,\ n\in\mathbb{N}$ şi $f\left(\frac{n}{2}\right)=e^{\frac{n}{4}}$, unde F este o primitivă a lui f.

4. Fie elementele x şi y ale inelului $(A, +, \cdot)$ astfel încât $x+y=1$ şi $x^{2005}=x^{2006}$. Să se demonstreze că $1-x^{2004}y\in A$ este element inversabil.