Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

CLASA A IV-A

1. a) Aflaţi numărul necunoscut:

$$\{2998 - [(351 + 235 - y) \times 5 + 38]\} + 625 : 25 = 670.$$

b) Suma a trei numere este 225. Dacă din primul scădem 47, din al doilea 39 şi din al treilea 58, se obţine de fiecare dată acelaşi rezultat. Aflaţi cele trei numere.

EMILIA DIACONESCU, Slatina

2. Mergând spre cabană, un turist îl întreabă pe pădurarul care-i iese în cale câţi kilometri mai are de parcurs până la cabană. Pădurarul îi răspunde: „Dacă erai cu 1 kilometru mai în urmă, te aflai la jumătatea drumului. Dacă ai mai fi mers 1 kilometru, ai mai fi avut de parcurs un sfert din lungimea drumului." Aflaţi:

a) lungimea drumului parcurs;

b) câţi kilometri a parcurs turistul până la întâlnirea cu pădurarul.

VALERICA MIOARA IANCU, Scorniceşti

3. Îndoitul unui număr a fost mărit cu 3, iar rezultatul a fost mărit de 4 ori. Produsul obţinut, micşorat cu 5, a fost micşorat de 9 ori, obţinându-se 15. Care a fost numărul iniţial?

MARIA GEORGESCU, Slatina

4. Reconstituiţi adunarea:

$$\begin{array}{cccc} & U & N & A \; + \\ & U & N & A \; = \\ \hline D & O & U & A \end{array}$$

GAZETA MATEMATICĂ (2006)

NOTĂ.
1. Timp de lucru 2 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect corect rezolvat i se acordă 7 puncte.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

CLASA A V-A

1. Comparaţi numerele $3 \cdot 2^{6022}$ şi $2 \cdot 3^{4015}$.

GHEORGHE ŞTEFANA, Slatina

2. Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 2006\}$. Să se arate că nu există două submulţimi B şi C ale lui A astfel încât $B \cap C = \varnothing$, $B \cup C = A$ şi suma elementelor din B să fie egală cu suma elementelor din C.

DORINA RĂDULESCU, Caracal

3. Numerele $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ verifică relaţia

$$2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+d} + 2^{d+a} = 25.$$

Calculaţi $a + b + c + d$.

GAZETA MATEMATICĂ (2006)

4. Să se calculeze suma tuturor numerelor de forma $\overline{abba}$ ştiind că $\overline{ab} - \overline{ba} = 3a + 3b$.

GAZETA MATEMATICĂ (2006)

NOTĂ.
1. Timp de lucru 2 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect corect rezolvat i se acordă 7 puncte.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

CLASA A VI-A

1. Aflaţi numerele $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ştiind că $a+1$, $b+2$, $c+3$ şi 5 sunt direct proporţionale cu $4, 6, 8$ şi $d+9$.

DORIN POPA, Slatina

2. Măsurile a trei unghiuri $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COD}$ formate în acelaşi semiplan determinat de dreapta AD sunt direct proporţionale cu numerele 7, 9 şi 20.

   a) Aflaţi măsurile unghiurilor de mai sus.

   b) Dacă $[OE$ este semidreapta opusă semidreptei $[OC$, iar semidreptele $[OX$ şi $[OY$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOE}$, respectiv $\widehat{DOE}$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{XOY}$.

IOANA NIŢU, Caracal

3. Ştiind că a, b, c, $\dfrac{a+b}{b+c}$, $\dfrac{b+c}{c+a}$ şi $\dfrac{c+a}{a+b}$ sunt numere naturale nenule, să se determine $x \in \mathbb{Q}$ din proporţia:

$$\frac{4ab+3bc}{5bc+2ca} \cdot \frac{x}{2x+1} = \frac{7}{15}.$$

ION NEAŢĂ, Slatina

4. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că fracţia $\dfrac{2n+1}{n^2+n}$ este ireductibilă.

GAZETA MATEMATICĂ (2006)

NOTĂ.
1. Timp de lucru 2 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect corect rezolvat i se acordă 7 puncte.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

CLASA A VII-A

1. Să se arate că un patrulater convex este paralelogram dacă şi numai dacă lungimile perpendicularelor duse din vârfuri opuse pe diagonale sunt congruente două câte două.

EDUARD BUZDUGAN, Slatina

2. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele E, F şi G respectiv, intersecţiile perpendicularei din B pe AC cu dreptele AC, DC, AD. Să se arate că $BE^2 = EF \cdot EG$.

EDUARD BUZDUGAN, Slatina

3. Calculaţi $x + y + z$ dacă

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54.$$

GAZETA MATEMATICĂ (2006)

4. Fie a, b cifre, $a \neq b$. Considerăm numerele

$$\begin{aligned} x &= \overline{aba} + \overline{ab} + \overline{a0}, \\ y &= \overline{bab} + \overline{ba} + \overline{b0}. \end{aligned}$$

Determinaţi x şi y ştiind că y divide pe x.

GAZETA MATEMATICĂ (2006)

NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.

2. Toate subiectele sunt obligatorii.

3. Fiecărui subiect corect rezolvat i se acordă 7 puncte.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

CLASA A VIII-A

1. Cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{5ab}$, $\overline{1bc}$ şi $\overline{2ca}$ este 3. Să se arate că numărul $\sqrt{a^3+b^2+c}$ este iraţional.

ION NEAŢĂ, Slatina

2. Demonstraţi că

$$\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-12x-2y+37}+\sqrt{x^2+y^2-12x-10y+61}+$$
$$+\sqrt{x^2+y^2-4x-10y+29}\geq 8\sqrt{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

DORIN POPA, Slatina

3. Fie $x,y\in\mathbb{R}^*$ şi $a=x-\dfrac{1}{y}$, $b=y-\dfrac{1}{x}$. Dacă $ab\in[-4,0]$, să se determine $|xy|$.

MIRCEA FIANU, Bucureşti

4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N şi P proiecţiile punctelor A,C respectiv B' pe diagonala $[BD']$. Să se arate că:

a) $BM+BN+BP=BD'$;

b) $BA+BB'+BC<2BD'$;

c) $D'A+D'B'+D'C<\dfrac{5}{2}BD'$.

GAZETA MATEMATICĂ (2006)

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect corect rezolvat i se acordă 7 puncte.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA A IV-A

1. a) $y = 123$ **3p**

b) Obţinerea numerelor 74, 66, 85 .... **4p**

2. a) 8 km **5p**

b) 2 km **2p**

3. Numărul este 16 .... **7p**

Observaţie: Se acordă câte un punct pentru fiecare calcul intermediar.

4. $A = 0$ **1p**

$2 \times N = U$ sau $2 \times N = 10 + U$ **2p**

Studiul cazurilor şi găsirea soluţiilor **4p**

Observaţie: Se acordă câte un punct pentru fiecare soluţie găsită ($\overline{UNA}$ poate fi 630, 840, 680 şi 890).

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA A V-A

1. $3 \cdot 2^{6022} = 6 \cdot 2^{6021}$ şi $2 \cdot 3^{4015} = 6 \cdot 3^{4014}$ **2p**

   $2^{6021} = 2^{3 \cdot 2007} = 8^{2007}$ **2p**

   $3^{4014} = 3^{2 \cdot 2007} = 9^{2007}$ **2p**

   $3 \cdot 2^{6022} < 6 \cdot 3^{4014}$ **1p**

2. Suma elementelor din A este număr impar $(1003 \cdot 2007)$ **4p**

   Suma elementelor lui B adunată cu suma elementelor lui C este dublul unui număr natural, deci este număr par **2p**

   Finalizare **1p**

3. Unul dintre termenii sumei (fie acesta 2^{a+b}) este impar (pentru trei termeni impari se ajunge la o situaţie imposibilă) **2p**

   $2^{a+b} = 1 \Rightarrow a = b = 0$ **1p**

   $2^c + 2^d + 2^{c+d} = 24 \Rightarrow c = d = 4$ **4p**

4. Exploatarea descompunerii în baza 10 .... **2p**

   Găsirea relaţiei $a = 2b$ **3p**

   $\overline{abba} \in \{2112,\ 4224,\ 6336,\ 8448\}$ **2p**

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA A VI-A

1. $\dfrac{a+1}{4}=\dfrac{b+2}{6}=\dfrac{c+3}{8}=\dfrac{5}{d+9}$ **2p**

   $d+9 \mid c.m.m.d.c\ (20,30,40)$ **3p**

   $d=1$ **1p**

   $a=b=c=1$ **1p**

2. a) Folosirea proporţionalităţii **1p**

   Obţinerea măsurilor 35°, 45°, 100° **2p**

   b) $m\left(\widehat{DOE}\right)=80^\circ$ **1p**

   $m\left(\widehat{AOE}\right)=100^\circ$ **1p**

   $m\left(\widehat{XOY}\right)=90^\circ$ **2p**

3. $\dfrac{a+b}{b+c}\cdot\dfrac{b+c}{c+a}\cdot\dfrac{c+a}{a+b}=1$ **3p**

   Cele trei rapoarte de mai sus sunt egale cu 1 $\Rightarrow a=b=c$ **2p**

   $\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{7}{15}\Rightarrow x=7$ **2p**

4. Fie d un divizor comun al numitorului şi numărătorului $\Rightarrow d \mid 2n+1$ şi $d \mid n^2+n$ .. **2p**

   $d \mid 2n^2+n$ şi $d \mid 2n^2+2n \Rightarrow d \mid n$ **3p**

   $d \mid 2n+1$ şi $d \mid n \Rightarrow d \mid 1$ **2p**

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA A VII-A

1. Fie $ABCD$ patrulaterul din enunţ şi $AA_1 \perp BD$, $CC_1 \perp BD$, $BB_1 \perp AC$ şi $DD_1 \perp AC$.

   $(\Rightarrow)$ $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow (AA_1) \equiv (CC_1)$ şi $(BB_1) \equiv (DD_1)$ **3p**

   $(\Leftarrow)$ $(AA_1) \equiv (CC_1)$ şi $(BB_1) \equiv (DD_1) \Rightarrow ABCD$ paralelogram **4p**

2. $\Delta GDF \sim \Delta GAB \Rightarrow \dfrac{DF}{AB} = \dfrac{GD}{GA}$ **1p**

   Construiesc $DD_1 \perp AC \Rightarrow (DD_1) \equiv (BE)$ **2p**

   $\Delta AD_1D \sim \Delta AEG \Rightarrow \dfrac{AD}{AG} = \dfrac{DD_1}{GE}$ **1p**

   $\dfrac{DF}{AB} + \dfrac{DD_1}{GE} = 1 \Rightarrow \dfrac{BE}{GE} = \dfrac{CF}{CD}$ **1p**

   $\Delta CEF \sim \Delta CD_1D \Rightarrow \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{EF}{BE}$ **1p**

   $BE^2 = EF \cdot EG$ **1p**

3. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ **3p**

   $x = \dfrac{1}{18}$, $y = \dfrac{1}{9}$, $z = \dfrac{1}{6}$ **4p**

4. $x = 11\,(11a + b)$ şi $y = 11\,(11b + a)$ **1p**

   $y \mid x \Rightarrow 11b + a \mid 11a + b \Rightarrow a > b$ **1p**

   $11b + a \mid 10\,(a - b)$ **1p**

   Studiul cazurilor şi obţinerea soluţiilor (x, y) **4p**

   Observaţie. Se obţin soluţiile $(a, b) \in \{(4, 1), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Olt

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 27 ianuarie 2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA A VIII-A

1. $a+b=M_3+1,\ b+c=M_3+2,\ c+a=M_3+1$ **2p**

   $i)$ $a=M_3 \Rightarrow b=M_3+1, c=M_3+1$ **1p**

   $a^3+b^2+c=M_3+2$ **1p**

   Un pătrat perfect poate fi de forma M_3 sau M_3+1 .... **1p**

   $ii)$ $a \neq M_3 \Rightarrow$ contradicţie **2p**

2. Distanţele din enunţ sunt MA, MB, MC, MD, unde $M(x,y)$, $A(2,1)$, $B(6,1)$, $C(6,5)$, $D(2,5)$ **3p**

   $AC=BD=4\sqrt{2} \Rightarrow AC+BD=8\sqrt{2}$ **1p**

   $MA+MC \geq AC$ şi $MB+MD \geq BD$ **2p**

   Valoarea minimă se obţine pentru $\{M\}=AC\cap BD$ **1p**

3. $ab=xy+\dfrac{1}{xy}-2$ **1p**

   $ab\in[-4,0] \Rightarrow -2 \leq xy+\dfrac{1}{xy} \leq 2$ **2p**

   Dacă $xy>0 \Rightarrow xy+\dfrac{1}{xy}\geq 2$, deci $xy+\dfrac{1}{xy}=2 \Rightarrow xy=1 \Rightarrow |xy|=1$ **2p**

   Dacă $xy<0 \Rightarrow xy+\dfrac{1}{xy}\leq -2$, deci $xy+\dfrac{1}{xy}=-2 \Rightarrow xy=-1 \Rightarrow |xy|=1$ **2p**

4. **a)** $AB^2=BM\cdot BD'$, $BC^2=BN\cdot BD'$, $BB'^2=BP\cdot BD'$ **2p**

   $BD'^2=AB^2+BC^2+BB'^2=BD'(BM+BN+BP) \Rightarrow BM+BN+BP=BD'$ **1p**

   b) Se foloseşte inegalitatea $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$; rezultă:
   $(BA+BB'+BC)^2 \leq 3(BA^2+BB'^2+BC^2)=3BD'^2 \Rightarrow BA+BB'+BC \leq \sqrt{3}BD' < 2BD'$ **2p**

   c) $(D'A+D'B'+D'C)^2 \leq 3(D'A^2+D'B'^2+D'C^2)=6(AA'^2+A'D'^2+A'B'^2)=6BD'^2$, de unde rezultă $D'A+D'B'+D'C \leq \sqrt{6}BD' < \dfrac{5}{2}BD'$ **2p**