A 63-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

SOLUŢII

CLASA A VII-A

Subiectul 1. a) Fie M şi N proiecţiile lui P pe AB, respectiv CD. Atunci $PB^2-PA^2 = MB^2-MA^2 = NC^2-ND^2 = PC^2-PD^2$, de unde $PD = \sqrt{2}$. 2p

b) Cum $\Delta PAB \equiv \Delta PAD$ (LLL), rezultă că $m(\angle PAB) = 45°$. 2p

Din teorema lui Pitagora, $PM = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}PB$, de unde $m(\sphericalangle PBM) = 30°$. 2p

$m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle APM) + m(\sphericalangle MPB) = 45° + 60° = 105°$. 1p

Soluţia 2. a) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, segmentul $[PO]$ este mediană în triunghiurile (eventual degenerate) PAC şi PBD, de unde $PA^2+PC^2 = PB^2+PD^2$. Rezultă că $PD = \sqrt{2}$. 2p

b) Fie Q astfel încât $PB = BQ$, $m(\angle PBQ) = 90°$, P şi Q de o parte şi de alta a lui BC. Atunci $\Delta ABP \equiv \Delta CBQ$ (LUL). 2p

Din teorema lui Pitagora în ΔPBQ, $PQ = 2$, iar din reciproca teoremei lui Pitagora în ΔPCQ rezultă $m(\angle PCQ) = 90°$. 1p

Cum $CQ = \frac{1}{2}PQ$, rezultă $m(\sphericalangle CPQ) = 30°$. 1p

$m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle CQB) = m(\sphericalangle CQP)+m(\sphericalangle PQB) = 60°+45° = 105°$. 1p

Subiectul 2. Construim D' simetricul lui D faţă de A. 1p

Notând $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ECD) = m(\sphericalangle CED) = x$, rezultă că $m(\sphericalangle ADB) = 2x$ şi $m(\sphericalangle ABD') = m(\sphericalangle ABD) = 90° - 2x$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle CBD') = x + 90° - 2x = 90° - x$. 2p

În triunghiul BCD', deoarece $m(\sphericalangle BD'C) = 2x$, rezultă că $m(\sphericalangle BCD') = 90° - x = m(\sphericalangle CBD')$, deci triunghiul $D'BC$ este isoscel şi $D'C = D'B = DB$. 2p

Dar $DC = DE$, de unde $BE = BD - DE = CD' - CD = DD' = 2 \cdot AD$. 2p

Subiectul 3. a) Cum $(m^2 - 2n) \mid (n^2 + 2m)$ şi $n^2 + 2m > 0$, rezultă $m^2 - 2n \leqslant n^2 + 2m$, adică $(m - 1)^2 \leqslant (n + 1)^2$, sau $m \leqslant n + 2$. Analog, $n \leqslant m + 2$. În consecinţă, $|m - n| \leqslant 2$. 2p

b) Presupunem $n \geqslant m$. Atunci $n \in \{m, m + 1, m + 2\}$.

Dacă $n = m$, trebuie ca $\dfrac{n+2}{n-2} = 1 + \dfrac{4}{n-2} \in \mathbb{Z}$, de unde $n \in \{1, 3, 4, 6\}$. Obţinem perechile $(n, m) \in \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (6, 6)\}$. 1p

Dacă $n = m + 1$, atunci $\dfrac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m} = 1 + \dfrac{2m + 1}{m^2 + 1}$.

Pentru $m \geqslant 3$ avem $0 < \dfrac{2m + 1}{m^2 + 1} < 1$, deci $\dfrac{2m + 1}{m^2 + 1} \notin \mathbb{Z}$.

Pentru $m = 1$, $\dfrac{2m + 1}{m^2 + 1} = \dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, iar pentru $m = 2$ $(n = 3)$ avem $\dfrac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n} = \dfrac{13}{-2} \notin \mathbb{Z}$. Aşadar în cazul $n = m + 1$ nu avem soluţii. 1p

Dacă $n = m + 2$, avem $\dfrac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m} = 1 \in \mathbb{Z}$. Trebuie ca $\dfrac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n} = 1 + \dfrac{8m + 8}{m^2 - 2m - 4} \in \mathbb{Z}$.

Dacă $m \geqslant 12$, atunci $m^2 - 2m - 4 > 8m + 8$. Într-adevăr, $m^2 - 10m - 12 = m(m - 10) - 12 \geqslant 12 \cdot 2 - 12 > 0$. Rezultă că pentru $m \geqslant 12$ avem $\dfrac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n} \notin \mathbb{Z}$. Pentru $m \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ se verifică perechile obţinute şi se constată că $\dfrac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n} \in \mathbb{Z}$ pentru $(m, n) \in \{(2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$

În concluzie, având în vedere simetria fracţiilor,

$(m, n) \in \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)\}$.
....3p

Subiectul 4. Să numim *convenabil*, respectiv *neconvenabil*, un număr care se poate, respectiv nu se poate scrie ca suma dintre un număr şi un redus al său.

Suma dintre numărul $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ şi redusul său $B = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ este numărul $11B + a_7$, adică un număr de cel puţin 7 cifre, mai mare decât $11 \cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărţirea cu 11.

Alegând în mod potrivit numărul B şi cifra a_7, rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mare decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărţirea cu 11, este convenabil. 1p

Suma dintre numărul $C = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5c_6}$ şi redusul său $D = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$ este numărul $11D + c_6$, adică un număr de cel mult 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărţirea cu 11.

Ca urmare, alegând în mod potrivit numărul D şi cifra c_6, rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărţirea cu 11, este convenabil. 1p

Aşadar, numerele *neconvenabile* se află în mulţimea numerelor de 7 cifre care dau restul 10 la împărţirea cu 11. Întrucât suma oricărui număr natural cu orice redus al său, altul decât cel obţinut prin ştergerea ultimei cifre, este un număr par, rezultă că numerele de 7 cifre, de forma $22p+21$, $p \in \mathbb{N}$, sunt *neconvenabile*. 2p

Rămâne să studiem situaţia numerelor de 7 cifre de forma $22p+10$, $p \in \mathbb{N}$. Vom arăta că aceste numere se pot scrie sub forma

$$\overline{a_1a_2...a_{n-2}a_{n-1}a_n} + \overline{a_1a_2...a_{n-2}a_n} = 110 \cdot \overline{a_1a_2...a_{n-2}} + 10 \cdot a_{n-1} + 2a_n,$$

unde $n \in \{6,7\}$.

Numerele de forma $22p+10$, $p \in \mathbb{N}$, au, în funcţie de restul împărţirii lui p la 5, una din formele $110k+10$, $110k+32$, $110k+54$, $110k+76$, $110k+98$, $k \in \mathbb{N}$.

Alegând $k = \overline{a_1a_2...a_{n-2}}$ şi, de exemplu,

$$(a_{n-1}, a_n) \in \{(1,0),(3,1),(5,2),(7,3),(9,4)\},$$

rezultă că numerele de forma $22p+10$, $p \in \mathbb{N}$, sunt convenabile. 2p

Ca urmare, numerele *neconvenabile* de 7 cifre sunt cele de forma $22p+21$, $p \in \mathbb{N}$. Din $10^6 \leqslant 22p+21 \leqslant 10^7 - 1$, rezultă că $45\,454 \leqslant p \leqslant 454\,544$. Cum p ia $454\,544 - 45\,454 + 1 = 409\,091$ valori, rezultă că sunt $409\,091$ numere *neconvenabile* de 7 cifre. 1p

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Notăm relaţiile date:

$ab+c+d=3$ (1) $\qquad$ $bc+d+a=5$ (2)

$cd+a+b=2$ (3) $\qquad$ $da+b+c=6$ (4)

Adunând relaţiile (1) şi (2) şi scăzând relaţiile (3) şi (4) obţinem

$$(b-d)(a+c-2)=0.$$

Pentru $b=d$, din (1) şi (4) se obţine o contradicţie, deci $a+c=2$. 3p

Adunând relaţiile (3) şi (4) se obţine $(d+1)(a+c)+2b=8$, de unde $b+d=3$. 2p

Adunând relaţiile (2) şi (3) se obţine $(c+1)(b+d)+2a=7$, de unde $3c+2a=4$.

Rezultă $a=2$, $b=0$, $c=0$ şi $d=3$. 2p

Subiectul 2. Fie $\mathcal{D}$, respectiv $\mathcal{D}'$, mulţimea dreptelor, oricare două neparalele, care formează cu semidreapta pozitivă Ox unghiuri ascuţite, respectiv obtuze. Dacă o dreaptă $d \in \mathcal{D}$ conţine punctele $P_1, P_2 \in X$, atunci P_1P_2 este diagonală în dreptunghiul $P_1Q_1P_2Q_2$, unde $Q_1, Q_2 \in X$, deci fiecărei drepte $d \in \mathcal{D}$ îi corespunde o dreaptă $d' \in \mathcal{D}'$ şi reciproc. 2p

Tangentele unghiurilor formate de dreptele $d \in \mathcal{D}$ cu Ox sunt numere distincte de forma $\frac{y}{x}$, unde $x, y \in \{1, 2, ..., 9\}$, $(x, y) = 1$. 2p

Pentru $x \in \{1, 2, ..., 9\}$, sunt 9 fracţii ireductibile de forma $\frac{1}{x}$, 5 fracţii ireductibile de forma $\frac{2}{x}$, 6 de forma $\frac{3}{x}$, 5 de forma $\frac{4}{x}$, 8 de forma $\frac{5}{x}$, 3 de forma $\frac{6}{x}$, 8 de forma $\frac{7}{x}$, 5 de forma $\frac{8}{x}$ şi 6 fracţii ireductibile de forma $\frac{9}{x}$. 2p

Ca urmare, mulţimile $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}'$ au fiecare câte 55 de elemente, iar numărul dreptelor căutate este 112 (se adaugă o dreaptă paralelă cu Ox şi una paralelă cu Oy). 1p

Subiectul 3. Relaţia $HH' \perp (ACD)$ implică $HH' \perp CD$ şi, cum $CD \perp BH$, obţinem $CD \perp (BHH')$. 1p

Deoarece $AH' \perp CD$ rezultă $AH' \subset (BHH')$, deci $CD \perp AB$ (1) (punctele A, H, H', B sunt coplanare). 1p

Din $AC \perp DH'$ şi $AC \perp HH'$ obţinem $AC \perp (DHH')$, prin urmare $DH \perp AC$. Cum $DH \perp BC$, rezultă $DH \perp (ABC)$, deci $AB \perp DH$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $AB \perp (BCD)$. 4p

Dacă M este mijlocul lui $[CD]$, din $\frac{MG'}{MA} = \frac{MG}{MB} = \frac{1}{3}$, obţinem $GG' \parallel AB$.

Deoarece $AB \perp (BCD)$ şi $GG' \parallel AB$, rezultă $GG' \perp (BCD)$. 1p

Subiectul 4. a) Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ şi $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$, cu $a_1 < a_2 < ... < a_p$ şi $b_1 < b_2 < ... < b_p$.

Numerele $a_1+b_1 < a_2+b_1 < ... < a_p+b_1 < a_p+b_2 < a_p+b_3 < ... < a_p+b_p$ sunt elemente ale mulţimii $A + B$, deci $2p - 1 \leqslant 2013$, adică $p \leqslant 1007$. 2p

Considerând mulţimile $A = B = \{0, 1, 2, ..., 1006\}$, rezultă că $p = 1007$. 1p

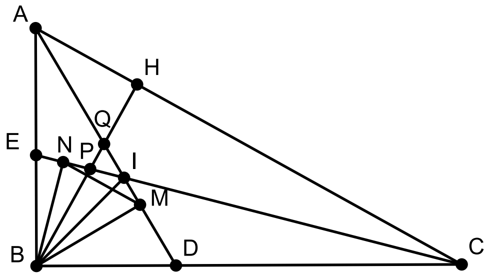
b) Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ şi $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, cu $a_1 < a_2 < ... < a_n$ şi $b_1 < b_2 < ... < b_n$.

Întrucât numărul de perechi $(a, b) \in A \times B$ este n^2, rezultă că mulţimea $A+B$ conţine cel mult n^2 elemente. Întrucât card $(A + B) = 2013$, rezultă $n^2 \geqslant 2013$, de unde $n \geqslant 45$. 2p

Considerând mulţimile $A = \{0, 1, 2, ..., 44\}$ şi $B = \{0, 45, 2 \cdot 45, 3 \cdot 45, ..., 42 \cdot 45, 43 \cdot 45, 1968\}$, rezultă că $n = 45$. 2p

CLASA A IX-A

Subiectul 1.



Dacă a, b, c sunt laturile, atunci
$\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{c^2}{a^2}, \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b}, \dfrac{QA}{QD} = \dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{b+c}{c} = \dfrac{c}{b-c}$ 3p
$\overrightarrow{BQ} = \dfrac{b-c}{b}\overrightarrow{BA} + \dfrac{c}{b}\overrightarrow{BD}$ 1p
$\overrightarrow{BM} = \dfrac{b-c}{2b}\overrightarrow{BA} + \dfrac{c+b}{2b}\overrightarrow{BD} = \dfrac{b-c}{2b}\overrightarrow{BA} + \dfrac{c}{2b}\overrightarrow{BC}$ 1p
şi, analog, $\overrightarrow{BN} = \dfrac{b-a}{2b}\overrightarrow{BC} + \dfrac{a}{2b}\overrightarrow{BA}$, de unde

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2b}\left((b-a-c)\overrightarrow{BC} + (a-c-b)\overrightarrow{BA}\right) = \frac{a+c-b}{2b}\overrightarrow{CA},$$

ceea ce dovedeşte concluzia. 2p

Subiectul 2. Arătăm că funcţiile care convin sunt cele de forma $f(x) = x+c$, precum şi cele de forma $f(x) = -x + c$, $c \in \mathbb{R}$ (este evident că acestea verifică cerinţa). 1p

Pentru aceasta arătăm că

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Într-adevăr, dacă $a < b$ şi $d = b - a$, atunci imaginea intervalului $I = (a - d, b + d)$ este un interval deschis J de lungime $3d$, iar imaginile intervalelor $(a - d, a)$, (a, b), $(b, b+d)$ sunt trei intervale deschise J_1, J_2, J_3 astfel încât fiecare are lungimea d şi $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup \{f(a)\} \cup \{f(b)\}$. Aceasta nu este posibil decât dacă J_1, J_2, J_3 sunt disjuncte iar $f(a)$ şi $f(b)$ sunt punctele care împart J în trei părţi egale, deci $|f(a) - f(b)| = d$. 4p

Din (1) deducem $|f(x) - f(0)| = |x|$, deci $f(x) = c \pm x$, unde $c = f(0)$. Apoi, din $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$, în cazul $f(1) = c + 1$ rezultă $f(c) = c + x$ pentru orice x, iar în cazul $f(1) = c - 1$ rezultă $f(c) = c - x$ pentru orice x. . 2p

Subiectul 3. Dacă notăm $x_{n+1} = x_1$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 - x_{i+1}^3}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - x_{i+1}^2 + \frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}}.$$

.... 3p

Pe de altă parte, $\dfrac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}} \leqslant \dfrac{1}{2} x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$; prin adunarea acestor inegalităţi pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ obţinem concluzia. 4p

Subiectul 4. Condiţia este $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)/d = 2^m, m \in \mathbb{N}^*$, unde d este cel mai mare divizor comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$. 1p

Într-adevăr, dacă a, b sunt numere naturale, atunci $(a - b, 2b) = (a, b)$ sau $(a - b, 2b) = 2(a, b)$ deci, după orice mutare, cel mai mare divizor comun al numerelor creioanelor din grămezile rămase se păstrează sau se înmulţeşte cu 2. În final rămâne o grămadă cu $n_1 + \ldots + n_k = 2^m d, m \in \mathbb{N}^*$ creioane. 3p

Reciproc, dacă $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 2^m d, m \in \mathbb{N}^*$, atunci demonstrăm prin inducţie după m că există o succesiune de mutări prin care toate creioanele se pot transfera în aceeaşi grămadă.

În cazul $m = 1$ avem două grămezi cu $n_1 = n_2$ creioane, deci după o mutare obţinem o singură grămadă.

Presupunem apoi că afirmaţia este adevărată pentru $m \leqslant p$ şi orice d. În situaţia $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 2^{p+1} d$, cardinalul mulţimii

$$A = \{ i \mid 1 \leqslant i \leqslant k, n_i/d \text{ este impar} \}$$

este număr par, deci putem grupa două câte două grămezile cu $n_i, i \in A$ elemente şi, efectuând câte o mutare în fiecare grupă, obţinem grămezi cu $n_1', \ldots, n_l'$ creioane, cu $n_1' + \ldots + n_l' = 2^q (n_1', \ldots, n_l'),\ q \leqslant p$. Conform ipotezei de inducţie, de aici avem o succesiune de mutări care deplasează toate creioanele în aceeaşi grămadă. 3p

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $z = a + bi$ un număr complex de modul 1 cu $a \in \mathbb{Q}$; avem $a^2 + b^2 = 1$. Un triunghi echilateral cu proprietăţile din enunţ şi cu un vârf în z are celelalte două vârfuri în punctele de afixe $z(-1/2 \pm (i\sqrt{3})/2)$, ... 2p numere având părţile reale egale cu $-a/2 \pm (b\sqrt{3})/2$. Cum $a \in \mathbb{Q}$, rezultă că $-a/2 \pm (b\sqrt{3})/2 \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. 1p

Fie $q = b/\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Problema revine la a demonstra că există o infinitate de soluţii $(a, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ale ecuaţiei $a^2 + 3q^2 = 1$, i.e. ecuaţia $m^2 + 3n^2 = p^2$ admite o infinitate de soluţii $(m, n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 1p

Cum $3n^2 = (p-m)(p+m)$, căutăm soluţii pentru care $p - m = 3$ şi $p + m = n^2$. Avem $n^2 = 2m + 3$, deci n este impar. 1p

Alegând $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$, obţinem $m = 2k^2+2k-1$ şi $p = 2k^2+2k+2$. Atunci $a = (2k^2+2k-1)/(2k^2+2k+2)$, $b = ((2k+1)\sqrt{3})/(2k^2+2k+2)$, iar $z = a + bi$ are modulul 1 şi $a, b > 0$, deci triunghiul echilateral cu un vârf în z este unic determinat. Cum $k \in \mathbb{N}$ este ales arbitrar, rezultă că există o infinitate de triunghiuri cu proprietatea cerută. 2p

Subiectul 2. Considerăm punctele A, B, C şi M având afixele a, b, c şi respectiv z. Atunci triunghiul ABC este echilateral, înscris în cercul de rază 1 centrat în originea O a planului complex. 1p

Pentru inegalitatea din stânga, avem succesiv

$$\begin{aligned}\sum |z-a| = \sum |\overline{a}||z-a| = \sum |\overline{a}z - \overline{a}a| \geqslant \\ \geqslant |\sum \overline{(}az-1)| = |z(\sum \overline{a}) - 3| = 3.\end{aligned}$$

.... 2p

Demonstrăm inegalitatea din dreapta. Considerăm o coardă care trece prin M şi fie P, Q punctele sale de intersecţie cu cercul circumscris triunghiului ABC. Fie p şi q afixele punctelor P şi Q. Există $\alpha \in [0,1]$ astfel ca $m = \alpha p + (1-\alpha)q$. Prin urmare

$$\sum |z-a| = \sum |\alpha p + (1-\alpha)q - a| \leqslant \alpha \sum |p-a| + (1-\alpha)\sum |q-a|,$$

deci

$$\sum |z-a| \leqslant \max\left\{\sum |p-a|, \sum |q-a|\right\}.$$

.... 2p

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $\max\{\sum |p-a|, \sum |q-a|\} = \sum |p-a|$ şi că P este poziţionat pe cerc între A şi C. Din identitatea lui Ptolemeu obţinem $PA + PC = PB$, adică $|p-a| + |p-c| = |p-b|$. Atunci $\sum |z-a| \leqslant \sum |p-a| = 2|p-b| \leqslant 4$, ceea ce trebuia demonstrat. 2p

Notă. Egalitatea din membrul stâng se realizează în cazul $z = 0$, iar pentru membrul drept dacă $z \in \{-a, -b, -c\}$.

Subiectul 3. a) Aplicând inegalitatea mediilor obţinem

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geqslant \sqrt[3]{xyz} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

.... 1p

Din inegalitatea mediilor avem

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leqslant \frac{x+y+z}{3}+\frac{ab(1/x+1/y+1/z)}{3} = \frac{1}{3}(f(x)+f(y)+f(z)),$$

.... 1p

unde $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(t)=t+\dfrac{ab}{t}$. Avem

$$t(a+b-f(t))=(b-t)(t-a)\geqslant 0, t\in[a,b],$$

de unde rezultă că $f(t)\leqslant a+b$, $t\in[a,b]$. 1p

Atunci $f(x)+f(y)+f(z)\leqslant 3(a+b)$, de unde rezultă $\dfrac{x+y+z}{3}+\dfrac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}\leqslant a+b$.

....1p

b) Conform punctului anterior, este suficient să demonstrăm că intervalul $[2\sqrt{ab},a+b]$ este inclus în mulţimea din membrul stâng. Vom arăta că

$$[2\sqrt{ab},a+b]\subset f([a,b]).$$

Pentru aceasta, fie $s\in[2\sqrt{ab},a+b]$. Ecuaţia $f(t)=s$ este echivalentă cu $t^2-st+ab=0$. Deoarece $s\geqslant 2\sqrt{ab}$, discriminantul s^2-4ab este pozitiv, deci ecuaţia admite soluţii reale, ... 1p
care aparţin intervalului $[a,b]$. 1p

Alegând $x=y=z=\dfrac{s\pm\sqrt{s^2-4ab}}{2}$, obţinem $\dfrac{x+y+z}{3}+\dfrac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}=s$, de unde rezultă cerinţa. 1p

Subiectul 4. Problema cere determinarea numărului de funcţii care sunt strict crescătoare pe mulţimile $\{1,2,\ldots,i-1,i\}$ şi pe $\{i+1,i+2,\ldots,n\}$, dar care nu sunt strict crescătoare pe mulţimea $\{1,2,\ldots,n\}$. 1p

Imaginea unei funcţii injective $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,m\}$ este o mulţime cu exact n elemente. Pentru o funcţie $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,m\}$ cu proprietatea cerută notăm cu A imaginea sa şi fie g unica funcţie strict crescătoare de la A la $\{1,2,\ldots,n\}$. Evident, g este funcţie bijectivă.

Rezultă că $h=g\circ f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ este o funcţie bijectivă cu proprietatea din enunţ. Într-adevăr, fie $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ pentru care $f(1)<\cdots<f(i)$, $f(i)>f(i+1)$ şi $f(i+1)<\cdots<f(n)$. Cum g este funcţie strict crescătoare, deducem că $g(f(1))<\cdots<g(f(i))$, $g(f(i))>g(f(i+1))$ şi $g(f(i+1))<\cdots<g(f(n))$, adică $h(1)<\cdots<h(i)$, $h(i)>h(i+1)$ şi $h(i+1)<\cdots<h(n)$. 1p

Vom arăta că funcţiei h îi corespunde unic o submulţime M a mulţimii $\{0,1,2\ldots,n\}$, alta decât $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$,..., $\{1,2,\ldots,n\}$.

Pentru fiecare $i \in \{0, 1, 2 \ldots, n\}$, alegem o submulţime M a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ având i elemente. Funcţia h este unic determinată de n–uplul $(h(1), h(2), \ldots, h(n))$, care se obţine ordonând crescător mai întâi elementele mulţimii M, iar apoi elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus M$. 2p

Pentru ca h să nu fie strict crescătoare pe $\{1, 2, \ldots, n\}$, mulţimea M cu card $M = i$ trebuie să fie diferită de $\{1, 2, \ldots, i\}$. 1p

Deoarece sunt 2^n submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, iar $n+1$ dintre acestea – anume $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, . . ., $\{1, 2, \ldots, n\}$ – nu convin, rezultă că sunt $2^n - n - 1$ funcţii bijective $h = g \circ f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea cerută. 1p

Cum imaginea $A \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ cu n elemente poate fi aleasă în C_m^n moduri, rezultă că sunt $C_m^n(2^n - n - 1)$ funcţii injective $f = g^{-1} \circ h : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ cu proprietatea din enunţ. 1p

CLASA A XI-A

Subiectul 1. a) Cum g este monotonă, are limite laterale în fiecare punct. Arătăm că g este continuă. Altfel, fie x_0 un punct în care $g(x_0 - 0) < g(x_0) \leqslant g(x_0 + 0)$ sau $g(x_0 - 0) \leqslant g(x_0) < g(x_0 + 0)$. Atunci intervalul $(g(x_0 - 0), g(x_0 + 0))$ nu este inclus în imaginea funcţiei, contrazicând surjectivitatea. Din inegalitatea din ipoteză rezultă şi continuitatea funcţiei f. 2p

Considerăm funcţia h dată de $h(x) = g(x) - f(x)$. Avem $h(0)h(1) = (g(0) - f(0))(g(1) - f(1)) \leqslant 0$, deoarece g este monotonă şi surjectivă. Proprietatea valorilor intermediare pentru funcţii continue implică existenţa unui punct $x_0 \in [0, 1]$ cu $h(x_0) = 0$ adică $f(x_0) = g(x_0)$. 1p

b) Fie $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = g(x)\}$. Dacă A are un singur element nu mai e nimic de arătat. Dacă A are cel puţin două elemente fie $\alpha = \inf A, \beta = \sup A$. Din continuitatea funcţiilor f şi g deducem că $\alpha, \beta \in A$. 1p

Fie $x, y \in [\alpha, \beta], x < y$. Dacă g este crescătoare avem $f(y) - f(x) \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |g(y) - g(x)| = g(y) - g(x)$. Prin urmare $f(y) - g(y) \leqslant f(x) - g(x)$, deci h este descrescătoare pe $[\alpha, \beta]$. Cum $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ rezultă $h = 0$ pe $[\alpha, \beta]$ adică $A = [\alpha, \beta]$ 3p

Subiectul 2. Presupunem că $\det(A) = 0$. Cum A are n^2 minori de ordinul $n - 1$ şi $n^2 > n - 1$, rezultă că A are cel puţin un minor nenul de ordin $n - 1$, deci rang$(A) = n - 1$ 2p

Cum $A^*A = O_n$ şi din inegalitatea Sylvester, $0 =$ rang$(AA^*) \geqslant$ rang$(A)+$ rang$(A^*) - n$ rezultă că rang$(A^*) \leqslant 1$ 1p

Din $A^* \neq O_n$ rezultă rang$(A^*) = 1$ 1p

Deoarece A^* are cel puţin $n^2 - n + 1$ elemente nenule, deducem că are o linie cu toate elementele nenule. Fie aceasta L_1 şi fie L_2 linia din A^* care conţine cel puţin un element nul (o astfel de linie există căci $k \geqslant 1$). Cum L_1 şi L_2 sunt proporţionale, există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $L_2 = \alpha L_1$ 2p

De aici deducem $\alpha = 0$ deci L_2 are toate elementele nule ceea ce atrage că A are cel puţin n minori de ordin $n-1$ nuli, absurd 1p

Subiectul 3. Avem $A^2 + AB + B^2 = (A - \omega B)(A - \bar{\omega} B)$, unde ω este o rădăcină cubică nereală a unităţii. 1p

Considerăm funcţia polinomială de grad 4 definită prin $f(x) = \det(A + xB) = \det A + ax + bx^2 + cx^3 + \det B x^4$. Condiţia din enunţ se transcrie (matricile având elemente reale) $f(\omega) = f(\bar{\omega}) = 0$ 1p

Avem

$$f(\omega) = \det A + c + \omega(a + \det B) + \omega^2 b,$$

deci $\det A + c = a + \det B = b$. (1) 1p

Cum $f(1) = \det A + a + b + c + \det B$ şi $f(-1) = \det A - a + b - c + \det B$, avem $f(1) + f(-1) = 2\det A + 2\det B + 2b$, iar din relaţiile (1) $2b = a + c + \det A + \det B = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)) + \det A + \det B$...................... 3p

Cum $f(1) = \det(A + B)$ şi $f(-1) = \det(A - B)$ deducem relaţia din enunţ. 1p

Subiectul 4. Arătăm că $f = 0$. Din relaţia dată, pentru orice $x \geqslant 0$ avem $f'(x) = f(\sqrt{x}) \geqslant 0$, deci f este crescătoare, de unde f' rezultă crescătoare... 2p

Fie $a = \sup\{x \mid f(x) = 0\}$. Dacă $a \in [0, \infty)$ atunci $f(x) = 0$ pe intervalul $[0, a]$ şi $f(x) > 0$ pe (a, ∞) (datorită continuităţii şi monotoniei funcţiei f)... 1p

Din teorema lui Lagrange aplicată pe intervalul $[a, a+1]$ deducem că $f(a + 1) = f'(c)$, cu $c \in (a, a+1)$. 1p

Atunci $f(a + 1) = f(\sqrt{c})$ şi cum f este crescătoare rezultă că este constantă pe intervalul $[\sqrt{c}, a + 1]$ deci f' este nulă pe acest interval. Aşadar $f'(a + 1) = f'(0) = 0$ şi cum f' este crescătoare rezultă $f' = 0$ pe $[0, a + 1]$. De aici $f'(c) = 0 = f(a + 1)$, absurd... 3p

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie n un număr natural nenul. Cu substituţia $y = n - x$, obţinem

$$\int_0^n f(n-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^n (f(n-y))^2\,\mathrm{d}y.$$

.... 2p

Prin adunarea acestei relaţii cu cea din enunţ, rezultă

$$\int_0^n (f(x) - f(n-x))^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

Din continuitatea lui f deducem că $f(x) = f(n-x)$ pentru orice $x \in [0, n]$. 3p

Fie $x \geqslant 0$ şi $n \geqslant x$ un număr natural nenul. Atunci

$$f(x+1) = f(n+1-x-1) = f(n-x) = f(x).$$

.... 2p

Subiectul 2. (a) Demonstrăm prima relaţie:

$$\begin{aligned} 0 &= [x-y, f(x-y)] = [x-y, f(x) - f(y)] \\ &= [x, f(x)] - [x, f(y)] - [y, f(x)] + [y, f(y)] = -[x, f(y)] + [f(x), y]. \end{aligned}$$

....2p

Demonstraţia celei de a doua relaţii face apel la prima. Fie $y = f(z)$, $z \in R$. Atunci

$$\begin{aligned} x[x,y] &= x[x, f(z)] = x[f(x), z] = xf(x)z - xzf(x) = f(x)xz - xzf(x) \\ &= [f(x), xz] = [x, f(xz)] = [x, f(x)y] = xf(x)y - f(x)yx \\ &= f(x)xy - f(x)yx = f(x)[x,y]. \end{aligned}$$

....2p

(b) Arătăm că $R^* = Z(R^*) = \{x : x \in R^*, xy = yx$ oricare ar fi $y \in R^*\}$, centrul grupului multiplicativ R^*. Fie $\operatorname{Fix} f = \{x : x \in R^*, f(x) = x\}$. Din a doua egalitate de la punctul **(a)**, rezultă că $R^* \setminus Z(R^*) \subseteq \operatorname{Fix} f$, deci $R^* = Z(R^*) \cup \operatorname{Fix} f$. Întrucât $Z(R^*)$ şi $\operatorname{Fix} f$ sunt şi subgrupuri ale lui R^*, sau $\operatorname{Fix} f \subseteq Z(R^*)$, caz în care $R^* = Z(R^*)$; sau $Z(R^*) \subseteq \operatorname{Fix} f$, caz în care $R^* = \operatorname{Fix} f$, i.e., f este identitatea — contradicţie. Prin urmare, $R^* = Z(R^*)$, i.e., R^* este comutativ. 3p

Remarci. Un endomorfism cu proprietatea din enunţ se numeşte endomorfism *comutativ*. Un inel *prim* este un inel care are următoarea proprietate: dacă produsul a două ideale este nul, atunci cel puţin unul dintre cele două ideale este nul. Folosind a doua relaţie de la punctul (a), se poate demonstra că un inel prim care posedă un automorfism comutativ diferit de identitate, este comutativ şi integru (fără divizori ai lui zero).

Teorema lui Wedderburn – orice corp finit este comutativ – este un caz particular al rezultatului de la punctul (b): cu excepţia cazului trivial al corpului cu p elemente (p prim), orice corp finit de caracteristică p admite un automorfism comutativ diferit de identitate — automorfismul Frobenius, $x \mapsto x^p$.

Subiectul 3. (a) Mulţimea cerută este intervalul închis $[0, 5(3-\sqrt{5})/24]$:

$$V(f_a) = \int_a^1 x^2\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^1 x\,\mathrm{d}x\right)^2 = (1-a^3)/3 - (1-a^2)^2/4$$

este o funcţie polinomială al cărei punct de maxim pe $[0,1]$ este $(\sqrt{5}-1)/2$. Concluzia rezultă din monotonia acestei funcţii. 3p

(b) Arătăm că această mulţime este inclusă în mulţimea de la punctul (a). Fie $f \in \mathcal{C}$. Vom demonstra că există a în $[0,1]$, astfel încât $V(f) \leqslant V(f_a)$. 1p

Fie

$$a = \left(1 - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \in [0,1].$$

Atunci

$$\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x = (1-a^2)/2 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\begin{aligned} V(f_a) - V(f) &= \int_0^1 \left((f_a(x))^2 - (f(x))^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x f_a(x) - (f(x))^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_0^1 x\,(f_a(x) - f(x))\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

....1p

Vom arăta că ultima integrală este pozitivă. Considerăm funcţia integrabilă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f_a(x) - f(x)$. Mai întâi demonstrăm că

$$\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

oricare ar fi $x \in [0,1]$. Considerăm cele două cazuri posibile: dacă $0 \leqslant x \leqslant a$, atunci

$$\begin{aligned} \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_x^1 (f_a(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,; \end{aligned}$$

iar dacă $a \leqslant x \leqslant 1$, atunci

$$\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 (f_a(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = \int_x^1 (t - f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

....1p

Aplicând formula a doua de medie, rezultă că există $b \in [0,1]$ astfel încât

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

de unde concluzia. 1p

Remarci. (1) Inegalitatea

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

poate fi demonstrată şi fără formula de medie. Fie n un număr natural nenul. Atunci:

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $M = \sup\{|g(x)| : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, atunci

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(x-\frac{k}{n}\right)|g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{M}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right) = \frac{M}{n}\,.\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\left(\int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{(k+1)/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \\ &\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k/n}^1 g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

de unde concluzia.

(2) O altă posibilitate este integrarea prin părţi pentru integrale Lebesgue:

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

Subiectul 4. Minimumul cerut este $n(m-1)+1$ şi e atins pentru oricare dintre polinoamele $X^n - k$, $k = 1, \cdots, m$. 1p

Vom arăta că numărul de rădăcini distincte ale unui polinom care are forma din enunţ este cel puţin $n(m-1)+1$.

Pentru orice $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, şi orice $z \in \mathbb{C}$, fie $\operatorname{ord}_z f = \operatorname{ord}_{X-z} f$ cea mai mare putere a lui $X - z$ care îl divide pe f. Mulţimea $Z(f) = \{z : z \in \mathbb{C}, \operatorname{ord}_z f \neq 0\}$ este exact mulţimea rădăcinilor distincte ale lui f, şi

$$\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{ord}_z f = \sum_{z\in Z(f)} \operatorname{ord}_z f = \deg f.$$

Prin urmare,

$$|Z(f)| + \sum_{z\in Z(f)} (\operatorname{ord}_z f - 1) = \deg f.$$

Dar

$$\sum_{z\in Z(f)} (\operatorname{ord}_z f - 1) = \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{ord}_z (f, f'),$$

unde f' este derivata lui f şi (f, f') este cel mai mare divizor comun al lui f şi f'. Deci

$$|Z(f)| + \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{ord}_z (f, f') = \deg f. \qquad (*)$$

.... 2p

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, şi $g = \prod_{k=1}^m (f + a_k)$, unde m este un număr natural nenul, iar a_k sunt numere complexe distincte două câte două. Pentru g relaţia $(*)$ devine:

$$|Z(g)| + \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{ord}_z (g, g') = \deg g = m \deg f.$$

Deoarece $g' = f' \sum_{k=1}^m \prod_{j\neq k} (f + a_j)$, iar polinoamele $f + a_k$ sunt coprime două câte două, dacă $\deg f \geqslant 1$, atunci (g, g') divide f', deci

$$\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{ord}_z (g, g') \leqslant \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{ord}_z f' = \deg f' = \deg f - 1.$$

Prin urmare, $|Z(g)| \geqslant (m-1)\deg f + 1$. 4p