

Olimpiada de Matematică

Etapa locală – 19.02.2006

Clasa a V-a

1. Fie \overline{abc} un număr de trei cifre scris în baza 10 cu $a \geq c + 2$ și $\overline{efg} = \overline{abc} - \overline{cba}$. Să se arate că $\overline{efg} + \overline{gfe}$ este constant.

* * *

2.a) Arătați că $10^9 - 1$ este multiplu de 9.

b) Fie $a = 9 + 99 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{99 \text{ ori}}$. Determinați suma cifrelor numărului a .

* * *

3. a) Câte numere strict mai mari decât 1000 și mai mici decât 2006 sunt multipli de 5 ?

b) Câte numere strict mai mari decât 1000 și mai mici decât 2006 dau restul 7 la împărțirea prin 13 ?

* * *

4. Fie $a = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2006}$ și mulțimea $A = \{2^{2^1}, 2^{2^2}, \dots, 2^{2^{2006}}\}$.

a) Să se arate că $a + 2 = 2^{2007}$.

b) Să se calculeze produsul elementelor mulțimii A .

c) Să se arate că oricum am alege două elemente din mulțimea A , diferența sau suma lor este divizibilă cu 10.

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă

Notă

1. Timp de lucru – 3 ore.
2. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
3. Nu se acordă puncte din oficiu.

Olimpiada de Matematică

Etapă locală – 19.02.2006

Clasa a VI-a

1. Se consideră numerele: $a = 2^{n+12} : (2^3)^4 + 3^{2n} : 9^n$, $b = \frac{49 \cdot 14^n + 22^n \cdot 11}{11^{n+1} + 7^{n+2}}$,

$c = 2^{n+3} - 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n - 2^0$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați numerele.

b) Stabiliți dacă $A = \frac{1}{ab} + \frac{2}{bc} - \frac{3}{ac}$ este fracție zecimală finită, periodică simplă sau periodică mixtă.

Geagatai Musa-Cerchez

2. a) Să se transforme $\frac{1}{13}$ în fracție periodică și să se determine numerele naturale nenule p și

n astfel încât $13 \cdot p = \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ ori}}$

b) Să se determine numărul natural a , $0 \leq a \leq 9$, astfel încât numărul $N = \overbrace{33 \dots 3a}^{2006 \text{ ori}}$ să fie divizibil cu 13.

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă

3. a) Care este suma numerelor naturale a, b, c care satisfac relația $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} = \frac{2001}{2006}$?

b) Să se arate că $\frac{10^{2006} + 2006}{3}$ este un număr natural și să se găsească suma cifrelor acestuia, numărul fiind scris în baza 10.

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă

4. În jurul unui punct O sunt situate unghiurile \widehat{AOB} , \widehat{BOC} , \widehat{COD} și \widehat{DOA} astfel încât $m(\widehat{BOC}) = 2 \cdot m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{COD}) = 3 \cdot m(\widehat{AOB})$ și $m(\widehat{DOA}) = 2 \cdot m(\widehat{BOC})$

a) Să se arate că punctele B, O, D sunt coliniare.

b) Calculați măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor \widehat{AOB} și \widehat{DOA} .

c) Dacă OE este bisectoarea lui \widehat{BOC} și, în plus, $OE \equiv OD \equiv OA$, arătați că triunghiul ADE este isoscel.

Notă

1. Timp de lucru – 3 ore.
2. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
3. Nu se acordă puncte din oficiu.

Succes !

Olimpiada de Matematică

Etapa locală – 19.02.2006

Clasa a VII-a

1. a) Arătați că $\sqrt{2006^x + 1}$ este număr irațional pentru orice x natural.

b) Determinați x număr întreg astfel încât $2006^x \cdot (x+1) = 2006x + 1$.

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă

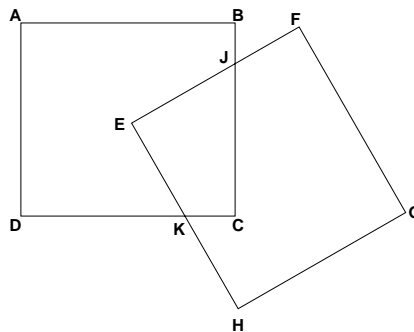
2. a) Arătați că $\sqrt{6}$ este irațional și găsiți primele două zecimale ale acestuia.

b) Arătați că $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}$ este irațional.

c) Fie $A = \left| a - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \right| + \left| 3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \right|$ unde $a \in \mathbb{N}$. Determinați cel mai mare număr natural a cu proprietatea că A este rațional.

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă

3. Două pătrate cu laturile de lungime 12 cm, sunt plasate astfel încât vârful unuia se găsește în centrul celuilalt (vezi figura de mai jos). Calculați aria patrulaterului $EJCK$.



* * *

4. În triunghiul oarecare ABC se consideră punctul D pe AC astfel încât $C \in (AD)$ și $BC \equiv CD$. Se construiește E simetricul lui D față de C . Paralela prin E la AB intersectează bisectoarea interioară a unghiului ACB în F .

a) Să se arate că $CF \parallel BD$.

b) Să se arate că DF trece prin mijlocul lui AB .

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă

Notă

1. Timp de lucru – 3 ore.
2. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
3. Nu se acordă puncte din oficiu.

Succes !

Olimpiada de Matematică

Etapa locală – 19.02.2006

Clasa a VIII-a

1.a) Să se arate că $(x \cdot |y| - y \cdot |x|) \cdot (y \cdot |z| - z \cdot |y|) \cdot (x \cdot |z| - z \cdot |x|) = 0$ pentru orice numere reale x, y, z .

b) Determinați două numere întregi x și y cuprinse între 10 și 100, unde y este numărul obținut prin inversarea cifrelor lui x și $x^2 - y^2 = 495$.

2. Fie a_n cel mai apropiat număr natural de \sqrt{n} (De exemplu: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 2$). Se

consideră $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

a) Calculați S_6

b) Arătați că $\sqrt{n} \neq k + \frac{1}{2}$ pentru orice numere naturale k și n . Deduceți de aici că pentru orice n există în mod unic a_n .

c) Câte numere naturale n verifică relațiile $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$, unde $k \in \mathbb{N}$ este număr fixat?

d) Arătați că $S_{n^2+n} \in \mathbb{N}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Calculați S_{2006} .

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă

3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, se iau punctele M, N și P pe muchiile AA' , BB' , respectiv CC' astfel încât $\frac{AM}{MA'} = \frac{B'N}{NB} = \frac{CP}{PC'} = 2$. Știind că $AB = a, BC = a\sqrt{3}, AA' = \frac{9}{2}a$:

a) Demonstrați că punctele M, N, P și D' sunt coplanare.

b) Determinați d , dreapta de intersecție dintre planele (MNP) și (ABC) .

c) Aflați măsura unghiului dintre perpendiculara dusă din D' pe d și planul (ABC) .

Geagatai Musa-Cerchez

4. Se consideră A, B, C trei puncte pe un cerc de rază r astfel încât triunghiul ABC este echilateral. Pe planul cercului se ridică perpendicularele AM, BN, CP , în același semispațiu delimitat de planul (ABC) , astfel încât $AM = 4a, BN = CP = a, a > 0$. Să se arate că dreapta de intersecție dintre planele (ABC) și (MNP) este tangentă la cerc.

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă

Notă

1. Timp de lucru – 3 ore.
2. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
3. Nu se acordă puncte din oficiu.

Succes !