EGMO | 2012

European Girls' Mathematical Olympiad

Day: 1

Joi, 12 aprilie 2012

Problema 1. Fie ABC un triunghi având punctul O ca centru al cercului său circumscris. Punctele D, E şi F se află respectiv pe laturile BC, CA şi AB, astfel încât dreapta DE este perpendiculară pe CO iar dreapta DF este perpendiculară pe BO. *(De exemplu, punctul D se află pe dreapta BC, fiind situat între B şi C pe acea dreaptă.)*

Fie K centrul cercului circumscris triunghiului AFE. Demonstraţi că dreptele DK şi BC sunt perpendiculare.

Problema 2. Fie n un număr întreg strict pozitiv. Determinaţi cel mai mare număr întreg m cu proprietatea că un tablou cu m linii şi n coloane poate fi umplut cu numere reale în aşa fel încât pentru oricare două linii diferite $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ şi $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ următoarea relaţie este adevărată

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Problema 3. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f\big(\, yf(x+y) + f(x)\,\big) = 4x + 2yf(x+y)$ pentru toţi $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. O mulţime A de numere întregi se zice *sumă-plină* dacă $A \subseteq A + A$, adică orice element $a \in A$ este suma unei perechi (nu neapărat unice) de elemente (nu neapărat distincte) $b, c \in A$. O mulţime A de numere întregi se zice *liberă-de-sume-zero* dacă 0 este singurul număr întreg care nu poate fi exprimat ca suma elementelor unei submulţimi finite nevide a lui A.

Există oare o mulţime sumă-plină liberă-de-sume-zero de numere întregi?

Day: 2

Vineri, 13 aprilie 2012

Problema 5. Numerele întregi pozitive p şi q sunt prime şi satisfac

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

pentru un anume număr întreg pozitiv n. Determinaţi toate valorile posibile ale diferenţei $q - p$.

Problema 6. Un număr infinit de persoane sunt înregistrate ca useri pe reţeaua socială *Mutrăbook*. Unele perechi de useri (diferiţi) sunt înregistrate ca *prieteni*, dar fiecare persoană are cel mult un număr finit de prieteni. Fiecare user are cel puţin un prieten. *(Relaţia de prietenie este simetrică; dacă A este prieten cu B, atunci şi B este prieten cu A.)*

Fiecare persoană trebuie să-şi desemneze unul dintre prieteni ca fiind *cel-mai-bun-prieten*. Dacă A îl desemnează pe B ca cel-mai-bun-prieten, nu urmează (din păcate) în mod necesar că şi B l-a desemnat pe A ca cel-mai-bun-prieten. Cineva desemnat ca cel-mai-bun-prieten este numit 1-*cel-mai-bun-prieten*. În general, dacă $n > 1$ este un număr întreg pozitiv, atunci un user este un n-*cel-mai-bun-prieten* dacă a fost desemnat ca cel-mai-bun-prieten de către cineva care este el însuşi un $(n-1)$-*cel-mai-bun-prieten*. O persoană care este un k-*cel-mai-bun-prieten* pentru toate numerele întregi pozitive k este numită *populară*.

(a) Demonstraţi că fiecare persoană populară este cel-mai-bun-prieten al (măcar) unei alte persoane populare.

(b) Demonstraţi că dacă persoanele ar fi putut avea infinit de mulţi prieteni, atunci ar fi fost posibil ca o persoană populară să nu fi fost cel-mai-bun-prieten al niciunei alte persoane populare.

Problema 7. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic înscris în cercul Γ şi având ortocentrul H. Fie K un punct pe cercul Γ, de cealaltă parte a lui BC decât A. Fie L simetricul lui K faţă de dreapta AB, şi fie M simetricul lui K faţă de dreapta BC. Fie E al doilea punct de intersecţie al cercului Γ cu cercul circumscris triunghiului BLM. Demonstraţi că dreptele KH, EM şi BC sunt concurente. *(Ortocentrul unui triunghi este punctul de intersecţie a înălţimilor sale.)*

Problema 8. Un *cuvânt* este o secvenţă finită de litere dintr-un anume alfabet. Un cuvânt se zice *repetitiv* dacă este o concatenare de cel puţin două sub-cuvinte identice (de exemplu, *ababab* şi *abcabc* sunt repetitive, dar *ababa* şi *aabb* nu sunt). Demonstraţi că dacă un cuvânt are proprietatea că orice transpoziţie a două litere adiacente îl transformă într-un cuvânt repetitiv, atunci toate literele sale sunt identice. (O transpoziţie a două litere adiacente identice, care lasă cuvântul neschimbat, este şi ea a fi considerată.)