Al treilea test de selecţie pentru OBM şi OIM

19 aprilie 2005

Subiectul 1. Punctele A_0, A_1, $\cdots$, A_5 sunt situate pe un cerc γ în ordinea dată. În cele ce urmează, toţi indicii sunt consideraţi modulo 6. Paralela prin A_{2k} la dreapta $A_{2k+2}A_{2k+4}$ intersectează a doua oară cercul γ în punctul A'_{2k}, iar dreptele $A'_{2k}A_{2k+3}$ şi $A_{2k+2}A_{2k+4}$ se intersectează în punctul A'_{2k+3}, $k = 0, 1, 2$. Arătaţi că dacă dreptele $A_{2k}A_{2k+3}$, $k = 0, 1, 2$, sunt concurente, atunci şi dreptele $A_{2k}A'_{2k+3}$, $k = 0, 1, 2$, sunt concurente.

Subiectul 2. Fie D, E şi F puncte situate în interiorul laturilor BC, CA, respectiv AB ale triunghiului oarecare ABC, astfel încât cercurile înscrise în triunghiurile AEF, BFD şi CDE să aibă razele egale cu jumătate din raza cercului înscris în triunghiul ABC. Arătaţi că punctele D, E şi F sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

Subiectul 3. Arătaţi că dacă distanţa între oricare două vârfuri ale unui poligon din plan este cel mult 1, atunci aria sa este strict mai mică decât $\sqrt{3}/2$. *Indicaţie* : Includeţi poligonul într-un hexagon convenabil ales.

Timp de lucru: 4 ore