A 56-A OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Bistriţa, 29 martie 2005

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Fie $ABCD$ un paralelogram. Bisectoarea unghiului $\angle ADC$ intersectează dreapta BC în E, iar mediatoarea laturii AD intersectează dreapta DE în punctul M. Fie F intersecţia dreptelor AM şi BC. Să se arate că:

(a) $DE = AF$;

(b) $AD \cdot AB = DE \cdot DM$.

Daniela şi Marius Lobază, Timişoara

Subiectul 2. Fie a şi b două numere întregi. Să se arate că:

(a) 13 divide $2a + 3b$ dacă şi numai dacă 13 divide $2b - 3a$;

(b) Dacă 13 divide $a^2 + b^2$, atunci 13 divide $2a + 3b$ sau $2b + 3a$.

Mircea Fianu, Bucureşti

Subiectul 3. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB şi CD, având diagonalele perpendiculare în O. Pe semidreptele $(OA$ şi $(OB$ se consideră punctele M şi respectiv N astfel încât unghiurile $\angle ANC$ şi $\angle BMD$ să fie drepte. Notăm cu E mijlocul segmentului MN. Să se arate că:

(a) Triunghiurile OMN şi OBA sunt asemenea.

(b) Dreapta OE este perpendiculară pe dreapta AB.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Subiectul 4. Pe o circumferinţă se scriu 2005 numere naturale cu suma 7022. Să se arate că există două perechi formate din numere vecine astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală decât 8.

Prelucrare după Marin Chirciu, Piteşti

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Se consideră un cub cu muchia de lungime 1. Să se arate că un tetraedru cu vârfurile în mulţimea vârfurilor cubului are volumul $\frac{1}{6}$ dacă şi numai dacă trei dintre vârfurile tetraedrului sunt vârfuri ale unei feţe a cubului.

Dinu Şerbănescu, Bucureşti

Subiectul 2. Pentru un număr natural n, scris în baza 10, notăm prin $p(n)$ produsul cifrelor sale.

(a) Să se demonstreze că $p(n) \leqslant n$.

(b) Să se determine numerele naturale n cu proprietatea:

$$10p(n) = n^2 + 4n - 2005.$$

Eugen Păltănea, Braşov

Subiectul 3. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor BB', respectiv BC, iar unghiul format de dreptele AB' şi BC' are măsura de $60°$. Fie O şi P intersecţiile dreptelor $A'C$ cu AC', respectiv $B'C$ cu $C'N$.

(a) Să se demonstreze că dreapta AC' este perpendiculară pe planul (OPM).

(b) Să se determine măsura unghiului format de dreapta AP cu planul (OPM).

Mircea Fianu, Bucureşti

Subiectul 4. (a) Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \geqslant \frac{4(uy + vx)}{(x + y)^2},$$

pentru orice numere reale $u, v, x, y > 0$.

(b) Fie $a, b, c, d > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a}{b + 2c + d} + \frac{b}{c + 2d + a} + \frac{c}{d + 2a + b} + \frac{d}{a + 2b + c} \geqslant 1.$$

Traian Tămâian, Carei

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi punctele $\{E\} = AD \cap BC$, $\{I\} = AC \cap BD$. Să se arate că triunghiurile EDC şi IAB au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $AB \parallel CD$ şi $IC^2 = IA \cdot AC$.

Virgil Nicula, Bucureşti

Subiectul 2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$x(f(x+1) - f(x)) = f(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Mihai Piticari, Câmpulung

Subiectul 3. Să se arate că pentru orice n natural nenul există un singur numar natural divizibil cu 5^n care în baza 10 se scrie cu n cifre din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vasile Pop, Cluj, şi Szász Robert, Tg. Mureş

Subiectul 4. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere strict pozitive. Să se arate că

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Bogdan Enescu, Buzău

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie n un număr natural, $n \geqslant 2$. Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, se consideră numerele

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k(n-k)\cos(tk) \text{ şi } y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k(n-k)\sin(tk).$$

Arătaţi că $x_n(t) = y_n(t) = 0$ dacă şi numai dacă

$$\operatorname{tg}\frac{nt}{2} = n \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Constantin Buşe, Timişoara

Subiectul 2. Baza $A_1A_2\cdots A_n$ a piramidei $VA_1A_2\cdots A_n$ este un poligon regulat. Arătaţi că dacă

$$\angle VA_1A_2 \equiv \angle VA_2A_3 \equiv \cdots \equiv \angle VA_{n-1}A_n \equiv \angle VA_nA_1,$$

atunci piramida este regulată.

* * *

Subiectul 3. (a) Să se arate că nu există funcţii injective $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ astfel încât $f(mn) = f(m) + f(n)$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul k, există funcţii injective $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathbb{N}$ pentru care $f(mn) = f(m) + f(n)$ pentru orice $m, n \in \{1, 2, \ldots, k\}$ cu $mn \leqslant k$.

Mihai Bălună, Bucureşti

Subiectul 4. Pentru $\alpha \in (0, 1)$ se consideră ecuaţia $\{x\{x\}\} = \alpha$.

(a) Să se arate că ecuaţia are soluţii raţionale, dacă şi numai dacă există $m, p, q \in \mathbb{Z}$, $0 < p < q$, p şi q prime între ele, astfel încât $\alpha = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{m}{q}$.

(b) Să se găsească o soluţie a ecuaţiei pentru $\alpha = \frac{2004}{2005^2}$.

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural fixat. Vom numi o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ***radicală*** dacă există o infinitate de numere naturale k, astfel încât ecuaţia $X^k = A$ să aibă soluţii în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

(a) Demonstraţi că dacă A este o matrice radicală atunci $\det A \in \{-1, 0, 1\}$ şi că există o infinitate de matrice radicale care au determinantul 1.

b) Demonstraţi că există o infinitate de matrice care nu sunt radicale şi au determinantul 0, precum şi o infinitate de matrice care nu sunt radicale şi au determinantul 1.

Prelucrare după Gabriel Dospinescu

Subiectul 2. Fie $f : [0, 1) \to (0, 1)$ o funcţie continuă şi surjectivă.

(a) Demonstraţi că, pentru oricare $a \in (0, 1)$, funcţia $f_a : (a, 1) \to (0, 1)$, definită prin $f_a(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (a, 1)$, este surjectivă.

(b) Daţi un exemplu de astfel de funcţie.

Eugen Păltănea, Braşov

Subiectul 3. Fie $X_1, X_2, \cdots, X_m$ o numerotare a celor $m = 2^n - 1$ submulţimi nevide ale mulţimii $\{1, 2, \cdots, n\}$, $n \geqslant 2$. Considerăm matricea $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, unde $a_{ij} = 0$, dacă $X_i \cap X_j = \varnothing$, şi $a_{ij} = 1$, în caz contrar. Demonstraţi că determinantul d al acestei matrice nu depinde de felul în care s-a efectuat numerotarea şi calculaţi d.

* * *

Subiectul 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă.

(a) Demonstraţi că f este continuă.

(b) Demonstraţi că există o funcţie $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, unic determinată, astfel încât

$$f(x + g(x)) = f(g(x)) - g(x)$$

pentru orice $x \geqslant 0$.

Dan Schwarz, Bucureşti

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Demonstraţi că morfismele de grup $f : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +)$ pentru care există λ real pozitiv, astfel încât $|f(z)| \leqslant \lambda|z|$ oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, sunt de forma

$$f(z) = \alpha z + \beta\overline{z}, \quad \text{unde } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 2. Fie G un grup cu m elemente şi H un subgrup propriu al său cu n elemente. Pentru fiecare $x \in G$ notăm

$$H^x = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$$

şi presupunem că $H^x \cap H = \{e\}$, oricare ar fi $x \in G \setminus H$.

(a) Demonstraţi că $H^x = H^y$ dacă şi numai dacă $x^{-1}y \in H$.

(b) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\bigcup\limits_{x \in G} H^x$ în funcţie de m şi n.

Călin Popescu, Bucureşti

Subiectul 3. Fie $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie continuă astfel încât $\lim\limits_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ există şi este finită. Demonstraţi că

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t = 0.$$

Radu Miculescu, Bucureşti

Subiectul 4. Fie A un inel cu $2^n + 1$ elemente, unde n este un număr natural nenul şi $M = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, x^k = x, \text{ pentru orice } x \in A\}$.

Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) A este corp;

(b) M este nevidă şi cel mai mic element al său este egal cu $2^n + 1$.

Marian Andronache, Bucureşti