

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA

V A S L U I, 12 februarie 2005

CLASA A IX – A

Subiectul nr. 1.

Fie G intersecția medianelor unui ΔABC oarecare, iar O un punct oarecare în planul triunghiului dat.

- Arătați că $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$;
- Demonstrați că $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$;
- Dacă punctul O este mobil pe dreapta BC , determinați poziția sa astfel încât $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}|$ să fie minim.

*Problema nr. 40 din Meridian Matematic Vasluian nr. 4,
prof. Lenuța Copacinschi, Liceul „Cuza Vodă” Huși*

Subiectul nr. 2

Fie triunghiul ABC

- Dacă $\alpha\vec{AB} + \beta\vec{BC} + \gamma\vec{CA} = \vec{0}$, atunci, demonstrați că $\alpha = \beta = \gamma$;
- Determinați M din interiorul triunghiului ABC cu proprietatea:

$$\frac{CM}{AM + BM} \vec{AB} + \frac{AM}{BM + CM} \vec{BC} + \frac{BM}{CM + AM} \vec{CA} = \vec{0}$$

Prof. Alistar Cristian, Grup Școlar Industrial „Ștefan Procopiu” Vaslui

Subiectul nr. 3

Fie $(x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad \text{si} \quad y_1 \leq y_2 \leq y_3)$ sau $(x_1 \geq x_2 \geq x_3 \quad \text{si} \quad y_1 \geq y_2 \geq y_3)$ cu $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

Să se demonstreze că:

- $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) \leq 3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ (inegalitatea lui Cebâșev)
- $(\forall) a, b, c > 0$, atunci:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \leq 3 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

Prof. Cozma Constantin, Liceul „M. Kogălniceanu” Vaslui

Subiectul nr. 4

Determinați $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât:

$$[x] + [x + m] = [nx], \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

Profesor, Bighiu Daniela Liceul „M. Kogălniceanu”, Vaslui

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
V A S L U I, 12 februarie 2005

CLASA A X -A

Subiectul nr. 1

Care este cea mai mare valoare pe care o poate lua expresia:

$$E = \frac{|z_1 z_2| \cdot |z_1 + z_2| + |z_2 z_3| \cdot |z_2 + z_3| + |z_3 z_1| \cdot |z_3 + z_1|}{|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3}.$$

Când z_1, z_2, z_3 sunt numere complexe pentru care expresia E are sens?

*Probl. Nr. 39 din Meridian Matematic Vasluian nr. 4 ,
Prof. Cristinel Mortici, Univ. "Valahia" Târgoviște*

Subiectul nr. 2

Fie ΔABC , $A' \in (AB)$ astfel încât $A'A = 3AB$; $B' \in (BC)$ astfel încât $B'B = 3BC$; $C' \in (CA)$ astfel încât $C'C = 3AC$.

- a) Demonstrați că ΔABC și $\Delta A'B'C'$ au același centru de greutate;
- b) Folosind radierea, ștergem desenul exceptând punctele A', B', C' . Cum procedăm pentru reconstituirea ΔABC ?

Prof. Baltag Adeluța, Liceul „Cuza Vodă” Huși

Subiectul nr. 3

Fie $M = \{1, 2, \dots, 20\}$. Se numește partiție cu două clase a lui M o pereche de mulțimi nevide A și B a.î. $A \cup B = M$ și $A \cap B = \emptyset$

Intr-o partiție nu contează ordinea claselor și nici ordinea elementelor într-o clasă.

Se consideră toate partițiile cu două clase pentru M și pentru fiecare se calculează diferența nenegativă dintre sumele elementelor din cele două clase. Demonstrați că există cel puțin 2005 astfel de diferențe egale.

Prof. Sergiu Romașcu, Liceul „M. Kogălniceanu Vaslui

Subiectul nr. 4

Să se rezolve ecuația:

$$4(x-3)^{\log_6(x^2+11)} + 2(x^2+11)^{\log_6(x-3)} = 6(x-3)^2$$

Prof. Gianina Elena Busuioc, I.S.J. Vaslui

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
V A S L U I, 12 februarie 2005

CLASA A XI -A

Subiectul nr. 1

Fie $l_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - \sqrt[3]{(x-b_1)(x-b_2)(x-7)} \right]$, $l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{b_1^x + b_2^x + 7^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ și $a^{l_1} \geq a^{l_2}$, unde $a \in (0,1)$ și $b_1, b_2 > 0$.

$$\text{Calculați } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - \cos(b_1 x)}{\cos x - \cos(b_2 x)}.$$

*Probl. Nr. 40 din Meridian Matematic Vasluian NR. 4,
Prof. Valeriu Brașoveanu, Gr.Șc.Ind. „Al.I.Cuza” Bârlad*

Subiectul nr. 2

Fie $A \in M_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det(A^2 - pI_2) = 0$, $p \in \mathbb{N}^*$, p – prim.
Să se arate că $A^2 = pI_2$

Prof. Baltag Adeluța, Liceul “Cuza Vodă” Huși

Subiectul nr. 3

O masă de billiard are colțurile notate A, B, C, D și dimensiunile $AB = a$ și $BC = 2a$.
Bila albă se află pe masă în punctul situat la distanță $\frac{a}{2}$ de AB și la distanță $\frac{a}{2}$ de BC .
Determinați punctul M de pe latura BC în care trebuie să trimitem bila albă astfel încât să ajungă apoi într-un punct N de pe CD și în final în buzunarul din punctul A .

Prof. Romașcu Sergiu, Liceul « M.Kogălniceanu » Vaslui

Subiectul nr. 4

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Arătați că A^n este de forma :

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ și calculați } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{b_n}}$$

*Prof. Romașcu Sergiu, Liceul « M.Kogălniceanu » Vaslui
Prof. Gianina Elena Busuioc, I.S.J. Vaslui*

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
V A S L U I, 12 februarie 2005

CLASA A XII -A

Subiectul nr. 1

Să se determine numărul real « a » astfel ca primitiva $\int \frac{x(x+a+2)}{(x^2+4x+6)^2} dx, x \in \mathbf{R}$ să fie funcție rațională.

*Probl. Nr. 35 din Meridian Matematic Vasluian . NR. 4 ,
Prof. Sterian Profire, Liceul "M. Kogălniceanu" Vaslui*

Subiectul nr. 2

Fie mulțimea matricelor $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{1}{2} \right\}$

a) Să se arate că M în raport cu înmulțirea matricelor este grup abelian ;

b) Fie $G = \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ și $x \perp y = \frac{(2x-1)(2y-1)+1}{2} \quad (\forall)x, y \in G$

Să se arate că (G, \perp) este un grup izomorf cu (M, \cdot)

c) Folosind eventual subpunctul precedent să se calculeze

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

d) Fie mulțimea matricelor

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{1}{2} \right\}$$

Să se demonstreze că $M = N$.

Prof. Cozma Constantin, Liceul « M.Kogălniceanu » Vaslui

Subiectul nr. 3

Pe $G = [1, \infty)$ se definește legea de compoziție “ * ” astfel

$$x * y = \sqrt[k]{x^k y^k - mx^k - ny^k + p}$$

unde, $m, n, p \in \mathbf{R}^*$ iar $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$. Știind că legea “ * ” este comutativă și admite element neutru pe $\sqrt[k]{p}$ calculați:

$$\frac{\left(\sqrt[k]{3} * \sqrt[k]{4} * \dots * \sqrt[k]{2005} \right)^k - 1}{\left(\sqrt[k]{3} * \sqrt[k]{4} * \dots * \sqrt[k]{2004} \right)^k - 1}$$

Prof. Valeriu Brașoveanu, Colegiul « Gh.Rosca Codreanu » Barlad

Subiectul nr. 4

a) Să se determine o funcție $f: A \rightarrow A, A \subset \mathbf{R}, A = (0, +\infty)$, care admite primitiva F ce verifică relația :

$$F(x) = \frac{f(x)}{nx+1}, \quad (\forall)x \in A, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

b) Pentru ce valoare a lui n, punctul $A(1, p^2)$ aparține graficului funcției găsite la punctul a, pentru $p =$ constantă pozitivă.

Prof. Gianina Elena Busuioc, I.S.J. Vaslui