OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 13-02-2005
CLASA a - VII – a

I a) Să se arate că $\sqrt{5n+7} \notin$ Q oricare ar fi n număr natural.

b) Se dă x=$\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{10}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Să se calculeze $\left(x+\sqrt{2}\right)^{2005}$

Prof. Dumitru Aurel

II Să se arate că:

a) $\dfrac{1}{k^2} \succ \dfrac{1}{k(k+1)}, k \in N^*$

b) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots+\dfrac{1}{2005^2} \succ 1\dfrac{501}{1003}$

Prof. Dumitru Aurel

III Fie ABCD un patrulater convex, punctele M, N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv CD. Dreptele AM şi BN se intersectează în P. Ştiind că $\dfrac{MP}{MA}=\dfrac{1}{5}$ şi $\dfrac{PB}{BN}=\dfrac{2}{5}$ arătați că ABCD este paralelogram.

Prof. Cimpoieşu Neculai

IV În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii $(BC)$ iar $N \in (AM)$. Dacă $BN \cap AC = \{P\}$ şi $CN \cap AB = \{Q\}$ se cere:

a) Să se arate că BCPQ este trapez;

b) Dacă $PQ \cap AM = \{R\}$ şi $\dfrac{PQ}{BC} = K$, să se calculeze valoarea raportului $\dfrac{AN}{MR}$.

Prof. Rotaru Marcel, prof. Mardare Lazăr, prof. Opaiț Maximilian

Olimpiada de matematică clasa a -VIII – a etapa locală 13 –02-2005

I Să se arate că:

$$\frac{\sqrt{27+10\sqrt{2}}-2\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{3\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{28-16\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\in N$$

prof. Ailioaie Victor

II Dacă a,b,c $\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ să se arate că:

$$ab + ac + bc \rangle a + b + c - \frac{3}{4}$$

prof. Dumitru Aurel

III. Pe planul rombului ABCD, având latura de lungime a cm şi m∠ (B) = 60° se ridică perpendiculara VA de lungime a cm. Fie E mijlocul segmentului$(AB)$ şi F mijlocul segmentului$(AD)$.

a) Să se găsească un punct M $\in (CV)$ egal depărtat de punctele V, C, A, E, F.

b) Calculați sinusul unghiului format de planele $(VEF)\, şi\, (MEF)$.

Prof. Dumitru Aurel

IV Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ având dimensiunile AB=a, BC=b, $AA'$=c.

a) Demonstrați că: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

b) Dacă a, b, c verifică inegalitatea: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ calculați:

i) $\cos\measuredangle\left(BD',\left(ACC'A'\right)\right)$

ii) Dacă $A'C'\cap B'D'=\{O'\}$ determinați aria secțiunii în paralelipiped prin planul$\left(A'O'B\right)$.

iii) Distanța dintre dreptele $\left(A'C, AD'\right)$.

Prof. Baltag Adeluța

## REZOVĂRI CLASA A VII-A

I a) Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi:  0, 1, 4, 5, 6, 9.
Ultima cifră a numărului 5n+7 :  2, 7.
Finalizare
b)

$$x=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\left(1-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\left(1-\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=1-\sqrt{2}$$

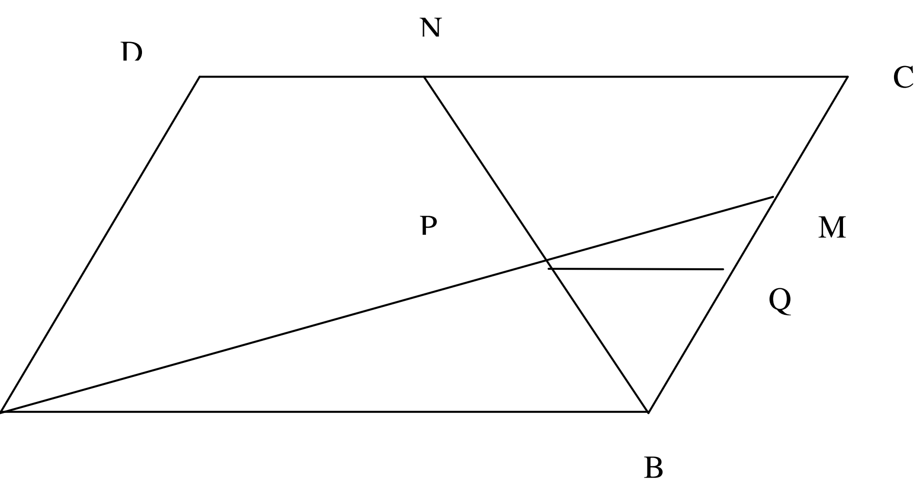
Finalizare

II a)  Evident

b) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2005^2}\rangle 1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...\frac{1}{2005\cdot 2006}$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2005^2}\rangle 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}$$

Finalizare




III

Figura

Fie PQ || AB $\triangle MPQ \sim \triangle MAB \Rightarrow T.F.A. \frac{MP}{MA} = \frac{MQ}{MB} = \frac{PQ}{AB} = \frac{1}{5}$

$\frac{MQ}{MB} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{MQ}{BC} = \frac{1}{10}$

$\frac{BQ}{BC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{PB}{BN} \Rightarrow$ Reciproca teoremei lui Thales PQ ||CD,

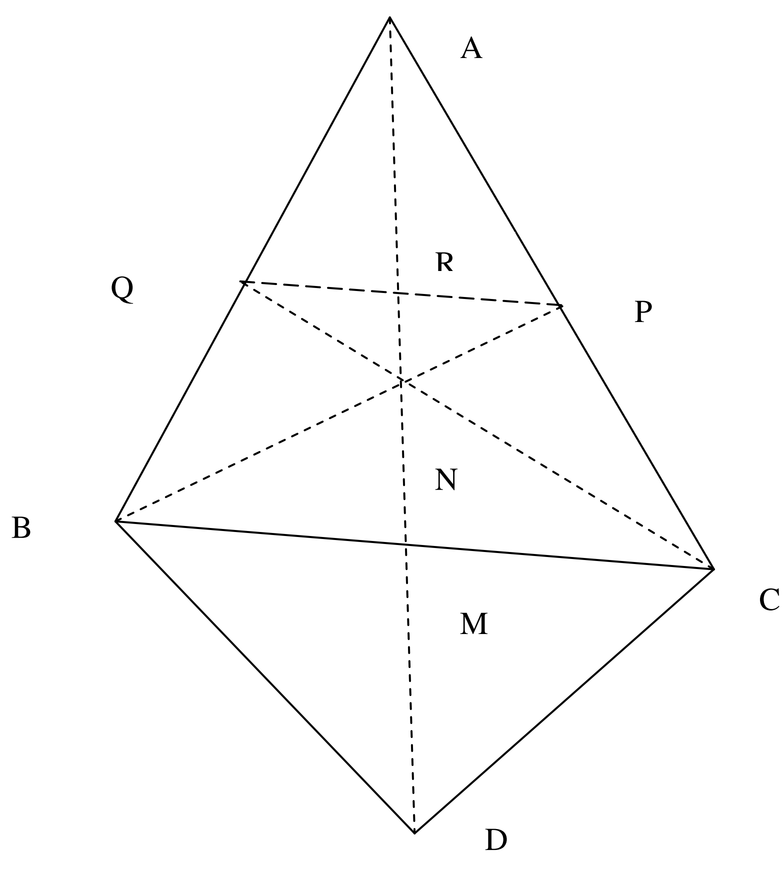
$\Rightarrow AB \parallel DC$

$\triangle BPQ \sim \triangle BNC \Rightarrow T.F.A. \frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BN} = \frac{PQ}{NC} = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\frac{PQ}{CD} = \frac{PQ}{AB} = \frac{1}{5} \Rightarrow AB = CD$

Finalizare

III a)




Figura

Prelungim $(MN)$ cu $[MD]\equiv[MN]\Rightarrow BDCN$ paralelogram

$$\triangle ANP \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AP}{AC}=\frac{NA}{DA}$$

$$\triangle AQN \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AQ}{AB}=\frac{NA}{DA}$$

Din cele două relații $\Rightarrow \dfrac{AP}{AC}=\dfrac{AQ}{AB}$ conform reciprocei teoremei lui Thales

$QP \parallel BC \Rightarrow BCPQ$ trapez

b) $\triangle PRN \sim \triangle BMN \Rightarrow \dfrac{RN}{MN}=\dfrac{RP}{BM}=\dfrac{PQ}{BC}=k$

$$\frac{RN}{RN+MN}=\frac{k}{k+1}\Rightarrow\frac{RN}{RM}=\frac{k}{k+1}$$

$$\frac{AR}{AM}=k\Rightarrow\frac{AR}{AM-AR}=\frac{k}{1-k},\quad \frac{AR}{RM}=\frac{k}{1-k}$$

$$\frac{RN}{RM}+\frac{AR}{RM}=k\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{1-k}\right)$$

$$\frac{AN}{RM}=\frac{2k}{1-k^2}$$

**BAREM CLASA A VIII-A**

**I** $\sqrt{27+10\sqrt{2}}=\sqrt{5^2+2\sqrt{2\cdot 5}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=5+\sqrt{2}$ **1**p

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ 1p

$\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$ 1p

$\sqrt{28-16\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}$ 1p

$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ 1p

$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ 1p

Finalizare 1p

II

$a\rangle\frac{1}{2},a-\frac{1}{2}\rangle 0$ 1p

$b\rangle\frac{1}{2},b-\frac{1}{2}\rangle 0$ 1p

$c\rangle\frac{1}{2},c-\frac{1}{2}\rangle 0$ 1p

$\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)+\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(c-\frac{1}{2}\right)+\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(c-\frac{1}{2}\right)\rangle 0$ 2p

$ab+ac+bc\rangle a+b+c+\frac{3}{4}$ 2p

III a)

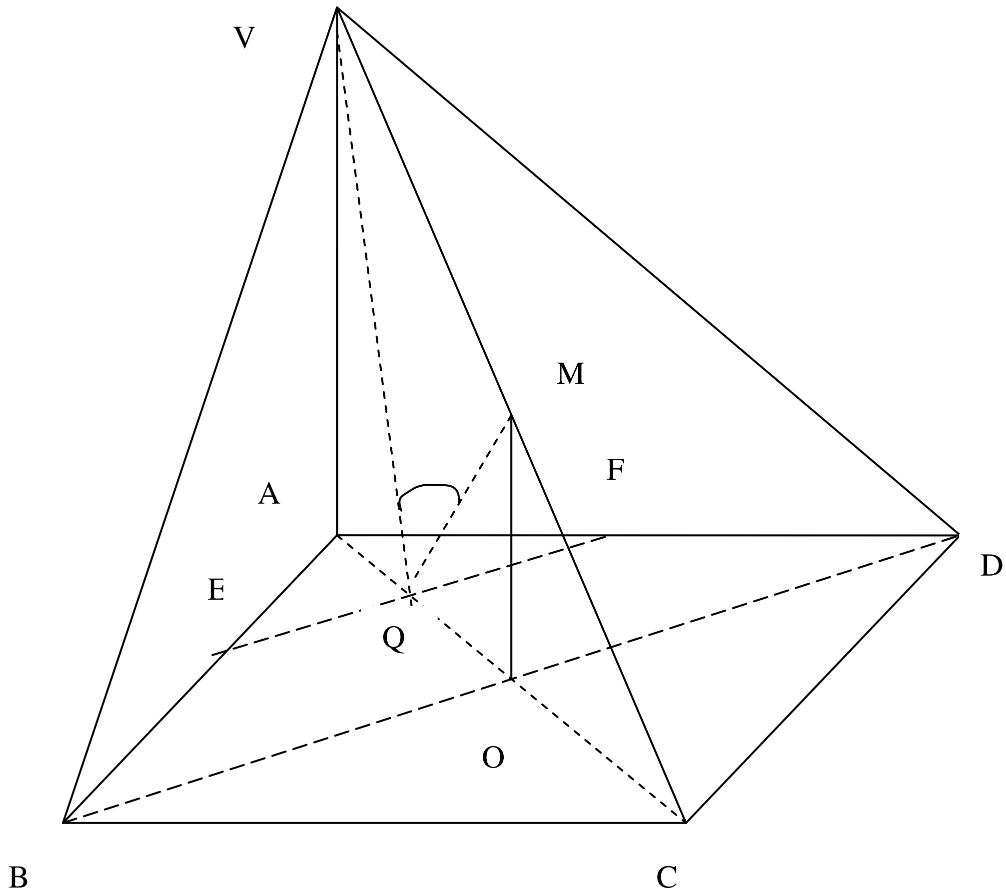
Figura 1p

Fie M mijlocul segmentului $[CV]$.

$[MV]\equiv[MC]\equiv[MA]$ $\triangle VAC, m\measuredangle(A)=90^0$ 1p

în $\triangle MOE,\ m\measuredangle(MOE)=90^0$ $ME=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{CV}{2}$ 1p

Analog pentru segmentul $[MF]$. Finalizare 1p




b)Segmentele (VQ) şi (MQ) sunt perpendiculare pe segmentul (EF) conform teoremei celor trei perpendiculare. 1p

$m\sphericalangle\left(\left(VEF\right),\left(MEF\right)\right)=m\sphericalangle\left(VQM\right)$ 1p

$A_{\triangle VQM}=A_{\triangle VAC}-A_{\triangle VAQ}-A_{\triangle MQC}$

$$A_{\triangle VQM}=\frac{VQ\cdot MQ\cdot\sin\left(\sphericalangle VQM\right)}{2}$$

Finalizare 1p

IV Se aplică inegalitatea mediilor :

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}$; $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\sqrt{bc}}$; $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\sqrt{cb}}$ prin sumare se obține :

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}$, egalitate pentu a=b=c. 2p

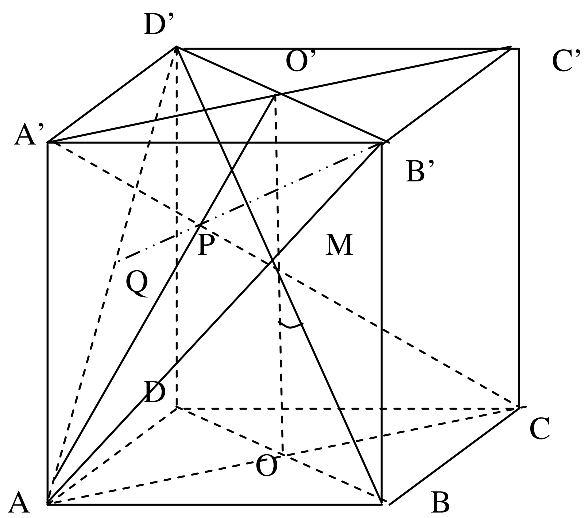



Figura 1p

b) conform punctului a, inegalitatea devine egalitate şi paralelepipedul devine cub de muchiea a.

i)

$$\mathrm{Pr}_{(ACC')} BD' = OO' \Rightarrow m\sphericalangle\left(BD',\left(ACC'A'\right)\right) = m\sphericalangle\left(OO',BD'\right) = m\sphericalangle\left(BMO\right)$$

Finalizare 1p

ii) $\left(A'OB'\right) \cap ABCDA'B'C'D' = \triangle A'BC'$ echilateral

$$A_{\triangle A'BC'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$ 1p

iii) Punctele A’ şi C sunt egal depărtate de vârfurile $\triangle AD'B'$ echilateral, se proiectează pe planul $AD'B'$ în centrul P al triunghiului.

$B'P \cap AD' = \{Q\}$

$PQ \perp AD'$

$A'C \perp PQ \Rightarrow$

PQ distanța dintre cele două drepte $PQ = \frac{1}{3}B'Q \quad PQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ 2p