

INSPECTORATUL ȘCOLAR BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 13.02.2005
CLASA A V-A

1. Să se arate că numărul $a = 2^{2n+2} \cdot 7^{n+3} + 11 \cdot 2^{2n+5} \cdot 7^n + 2^{2n} \cdot 7^{n+3} - 31 \cdot 2^{2n+1} \cdot 7^n$ este divizibil cu 2005, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Prof. Adela Cochino

2. Demonstrați că numărul $a = 2^n + 3^n$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural par.

Prof. Adela Cochino

3. Împărțind un număr la răsturnatul său, obținem câtul 4 și restul 87. Aflați numărul știind că diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților este 5.

(***)

4. Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Notăm cu M_1 mulțimea tuturor mulțimilor formate cu 2 elemente pare din mulțimea A , cu M_2 mulțimea tuturor mulțimilor cu 2 elemente impare din A și cu M mulțimea tuturor mulțimilor cu 2 elemente din mulțimea A .

Arătați că $2 \cdot \text{card}(M_1 \cup M_2) < \text{card} M$.

Prof. Valentin Florin Damian

CLASA A VI-A

1. Se dau numerele:

$$A = 6(10^n - 1), n \in \mathbf{N} \text{ și}$$

$$B = 4(10^{2005} - 1).$$

- a) Aflați valorile lui n pentru care numărul A este pătrat perfect
b) Arătați că produsul cifrelor numărului B nu poate fi pătrat perfect.

2. Determinați cifrele x și y știind că $\overline{0,x(y)} = \frac{2,(6)}{9x + y + 1}$.

3. Fie A, B, C și D puncte coliniare în această ordine.

Dacă $2AB + AD = 3AC$ și $BD = 3^{51}$, calculați BC și CD .

4. Unghiurile AOB și BOC sunt neadiacente, iar unghiurile AOC și COD sunt adiacente. Fie (OM) bisectoarea unghiului BOD și (ON) , (OP) semidrepte interioare unghiurilor AOB , respectiv AOC astfel încât $m(\angle NOP) = 90^\circ$.

Dacă $m(\angle COD) + m(\angle BOM) = 2[m(\angle NOB) + m(\angle POC)] = 176^\circ$, aflați măsura unghiului COD .

CLASA A VII-A

1. Fie x, y numere reale astfel încât $1 < x < 2$ și $2 < y < 3$.

Aratati ca $2xy - 5x - 3y + 7 < 0$.

prof. Nicolae Stanică, Brăila

2. Sa se arate ca nu exista nici un numar rational x cu proprietatea ca:

$$x^{2005} - 3x - 1 = 0.$$

3. Fie paralelogramul ABCD cu $AC \cap BD = \{O\}$.

Perpendiculara in A pe AB intersecteaza perpendiculara in B pe BC in M, iar perpendiculara in C pe CD intersecteaza perpendiculara in D pe DA in N.

a) Demonstrati ca punctele M, O, N sunt coliniare

b) Daca $m(\angle DAB) > 90^\circ$, aratati ca $MN > BD$

prof. Valentin Florin Damian, Brăila

4. Se considera triunghiul ABC cu $M \in (AC)$, $N \in (BC)$ si $P \in (AB)$ astfel încât $3AM = 2AC$, $2CN = BN$ si $2BP = AB$. Fie $AN \cap BM = \{T\}$.

Demonstrati ca:

a) T este mijlocul segmentului PC

b) $BM = 4TM$

prof. Nicolae Gerea

CLASA A VIII-A

1. Sa se rezolve in $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ inecuatia:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} \leq \frac{(x + y)^2 - xy}{x^2 + y^2}$$

prof. Valentin Florin Damian, Brăila

2. Sa se determine $(m,n,p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ care verifica relatia:

$$m^2 + 4n^2 + 16p^{16} = 2mn + 4mp + 8np.$$

prof. Gabriel Daniilescu, Brăila

3. Fie triunghiul ABC cu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ si N este mijlocul laturii BC. Daca $MA \perp (ABC)$, $MA = \frac{|b-c|}{\sqrt{2}}$ si $a^2 = 4bc$, calculati masura unghiului format de dreapta MN cu planul (ABC).

4. Se considera prisma triunghiulara regulata $ABCA'B'C'$ cu muchia bazei de lungime $\sqrt{6}$. Daca planele (ABC') si (BCA') sunt perpendiculare, sa se arate ca $2\sqrt{3} \cdot V + \sqrt{6} \cdot S = 81$, unde V este volumul prisme si S aria sa laterala.

prof. Octavian Horelu, Brăila

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de 3 ore