OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA

V A S L U I, 12 februarie 2005

CLASA a - VII – a

I a) Să se arate că $\sqrt{5n+7} \notin$ Q oricare ar fi n număr natural.

b) Se dă x=$\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{10}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Să se calculeze $\left(x+\sqrt{2}\right)^{2005}$

Prof. Dumitru Aurel

II Să se arate că:

a) $\dfrac{1}{k^2} \succ \dfrac{1}{k(k+1)}, k \in N^*$

b) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots+\dfrac{1}{2005^2} \succ 1\dfrac{501}{1003}$

Prof. Dumitru Aurel

III Fie ABCD un patrulater convex, punctele M, N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv CD. Dreptele AM şi BN se intersectează în P. Ştiind că $\dfrac{MP}{MA}=\dfrac{1}{5}$ şi $\dfrac{PB}{BN}=\dfrac{2}{5}$ arătaţi că ABCD este paralelogram.

Prof. Cimpoieşu Neculai

IV În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii (BC) iar $N \in (AM)$. Dacă $BN \cap AC = \{P\}$ şi $CN \cap AB = \{Q\}$ se cere:

a) Să se arate că BCPQ este trapez;

b) Dacă $PQ \cap AM = \{R\}$ şi $\dfrac{PQ}{BC} = K$, să se calculeze valoarea raportului $\dfrac{AN}{MR}$.

Prof. Rotaru Marcel, prof. Mardare Lazăr, prof. Opaiţ Maximilian

Olimpiada de matematică clasa a -VIII – a etapa locală 13 –02-2005

I Să se arate că:

$$\frac{\sqrt{27+10\sqrt{2}}-2\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{3\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{28-16\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\in N$$

prof. Ailioaie Victor

II Dacă a,b,c $\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ să se arate că:

$$ab + ac + bc \rangle a + b + c - \frac{3}{4}$$

prof. Dumitru Aurel

III. Pe planul rombului ABCD, având latura de lungime a cm şi m∠ (B) = 60° se ridică perpendiculara VA de lungime a cm. Fie E mijlocul segmentului (AB) şi F mijlocul segmentului (AD).

a) Să se găsească un punct M $\in(CV)$ egal depărtat de punctele V, C, A, E, F.

b) Calculați sinusul unghiului format de planele $(VEF)\,şi\,(MEF)$.

Prof. Dumitru Aurel

IV Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ având dimensiunile AB=a, BC=b, AA'=c.

a) Demonstrați că: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

b) Dacă a, b, c verifică inegalitatea: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$

calculați:

i) $\cos\square\left(BD',\left(ACC'A'\right)\right)$

CLASA A IX – A

Subiectul nr. 1.

Fie G intersecția medianelor unui ΔABC oarecare, iar O un punct oarecare în planul tringhiului dat.

a) Arătați că $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$;
b) Demonstrați că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$;
c) Dacă punctul O este mobil pe dreapta BC, determinați poziția sa astfel încât $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$ să fie minim.

Problema nr. 40 din Meridian Matematic Vasluian nr. 4,
prof. Lenuța Copacinschi, Liceul „Cuza Vodă" Huşi

Subiectul nr. 2

Fie triunghiul ABC

a) Dacă $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC}+\gamma\overrightarrow{CA}=0$, atunci, demonstrați că $\alpha=\beta=\gamma$;

b) Determinați M din interiorul triunghiului ABC cu proprietatea:

$$\frac{CM}{AM+BM}\overrightarrow{AB}+\frac{AM}{BM+CM}\overrightarrow{BC}+\frac{BM}{CM+AM}\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

Prof. Alistar Cristian, Grup Şcolar Industrial"Ştefan Procopiu"Vaslui

Subiectul nr. 3

Fie $\left(x_1\le x_2\le x_3 \quad si \quad y_1\le y_2\le y_3\right)$ sau $\left(x_1\ge x_2\ge x_3 \quad si \quad y_1\ge y_2\ge y_3\right)$ cu $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in R$

Să se demonstreze că:

a) $\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(y_1+y_2+y_3\right)\le 3\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)$ (inegalitatea lui Cebâşev)

b) $(\forall)$ a, b, c > 0, atunci:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\le 3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Prof. Cozma Constantin, Liceul „M. Kogălniceanu" Vaslui

Subiectul nr. 4

Determinați m, n $\in$ R, astfel încât:

$[x]+[x+m]=[nx], \quad (\forall)x\in R$

Profesor, Bighiu Daniela Liceul „M. Kogălniceanu" , Vaslui

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
V A S L U I, 12 februarie 2005

CLASA A X –A

Subiectul nr. 1

Care este cea mai mare valoare pe care o poate lua expresia:

$$E = \frac{|z_1 z_2| \cdot |z_1 + z_2| + |z_2 z_3| \cdot |z_2 + z_3| + |z_3 z_1| \cdot |z_3 + z_1|}{|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3}.$$

Când z_1, z_2, z_3 sunt numere complexe pentru care expresia E are sens?

Probl. Nr. 39 din Meridian Matematic Vasluian nr. 4 ,
Prof. Cristinel Mortici, Univ.”Valahia”Târgovişte

Subiectul nr. 2

Fie ΔABC, A’ ∈ (AB astfel încât A’A = 3AB; B’ ∈ (BC astfel încât B’B = 3BC; C’ ∈(CA astfel încât C’C = 3AC.

a) Demonstraţi că ΔABC şi ΔA’B’C’ au acelaşi centru de greutate;

b) Folosind radierea, ştergem desenul exceptând punctele A’, B’, C’. Cum procedăm pentru reconstituirea ΔABC?

Prof. Baltag Adeluţa, Liceul „Cuza Vodă” Huşi

Subiectul nr. 3

Fie M = {1, 2, …, 20}. Se numeşte partiţie cu două clase a lui M o pereche de mulţimi nevide A şi B a.î. A ∪ B = M şi A ∩ B = ∅

Intr-o partiţie nu contează ordinea claselor şi nici ordinea elementelor într-o clasă.

Se consideră toate partiţiile cu două clase pentru M şi pentru fiecare se calculează diferenţa nenegativă dintre sumele elementelor din cele două clase. Demonstraţi că există cel puţin 2005 astfel de diferenţe egale.

Prof. Sergiu Romaşcu, Liceul „M. Kogălniceanu Vaslui

Subiectul nr. 4

Să se rezolve ecuaţia:

$$4(x-3)^{\log_6(x^2+11)} + 2(x^2+11)^{\log_6(x-3)} = 6(x-3)^2$$

Prof. Gianina Elena Busuioc, I.S.J. Vaslui

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
V A S L U I, 12 februarie 2005

CLASA A XI –A

Subiectul nr. 1

Fie $l_1 = \lim_{x\to\infty}\left[x - \sqrt[3]{(x-b_1)(x-b_2)(x-7)}\right]$, $l_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{b_1^x + b_2^x + 7^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ şi $a^{l_1} \geq a^{l_2}$, unde $a \in (0,1)$ şi $b_1, b_2 > 0$.

Calculați $L = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x) - \cos(b_1 x)}{\cos x - \cos(b_2 x)}$.

Probl. Nr. 40 din Meridian Matematic Vasluian NR. 4,
Prof. Valeriu Braşoveanu, Gr.Şc.Ind. „Al.I.Cuza"Bârlad

Subiectul nr. 2

Fie $A \in \mathcal{M}_2(Q)$ astfel încât $\det(A^2 - pI_2) = 0$, $p \in N^*$, p – prim.
Să se arate că $A^2 = pI_2$

Prof. Baltag Adeluța, Liceul "Cuza Vodă" Huşi

Subiectul nr. 3

O masă de billiard are colțurile notate A, B, C, D şi dimensiunile AB = a şi BC = 2a. Bila albă se află pe masă în punctul situat la distanță $\frac{a}{2}$ de AB şi la distanță $\frac{a}{2}$ de BC. Determinați punctul M de pe latura BC în care trebuie să trimitem bila albă astfel încât să ajungă apoi într-un punct N de pe CD şi în final în buzunarul din punctul A.

Prof. Romaşcu Sergiu, Liceul « M.Kogălniceanu » Vaslui

Subiectul nr. 4

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Arătați că A^n este de forma :

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}, \forall n \in N^* \quad \text{şi calculați} \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{b_n}}$$

Prof. Romaşcu Sergiu, Liceul « M.Kogălniceanu » Vaslui
Prof. Gianina Elena Busuioc, I.S.J. Vaslui

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
V A S L U I, 12 februarie 2005

CLASA A XII –A

Subiectul nr. 1

Să se determine numarul real « *a* » astfel ca primitiva $\int \frac{x(x+a+2)}{(x^2+4x+6)^2}dx$, $x \in \mathbf{R}$ să fie funcție rațională.

Probl. Nr. 35 din Meridian Matematic Vasluian . NR. 4 ,
Prof. Sterian Profire, Liceul "M. Kogălniceanu" Vaslui

Subiectul nr. 2

Fie mulțimea matricelor $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \quad x \in R, \quad x \neq \frac{1}{2} \right\}$

a) Să se artae că M în raport cu înmulțirea matricelor este grup abelian ;

b) Fie $G = R - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ şi $x \perp y = \frac{(2x-1)(2y-1)+1}{2} \quad (\forall)x, y \in G$

Să se arate că $(G,\perp)$ este un grup izomorf cu $(M, \cdot)$

c) Folosind eventual subpunctul precedent să se calculeze

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix}^n \quad , \quad n \in N^*$$

d) Fie multimea matricelor

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \ / \, x \in R, \quad x \neq \frac{1}{2} \right\}$$

Să se demonstreze că M = N.

Prof. Cozma Constantin, Liceul « M.Kogălniceanu » Vaslui

Subiectul nr. 3

Pe G = $[1, \infty)$ se defineşte legea de compoziție " * " astfel

$$x * y = \sqrt[k]{x^k y^k - mx^k - ny^k + p}$$

unde, $m,n,p \in R^*$ iar $k \in N$, $k \geq 2$. Ştiind că legea " * " este comutativă şi admite element neutru pe $\sqrt[k]{p}$ calculați:

$$\frac{\left(\sqrt[k]{3} * \sqrt[k]{4} * .... * \sqrt[k]{2005}\right)^k - 1}{\left(\sqrt[k]{3} * \sqrt[k]{4} * ... * \sqrt[k]{2004}\right)^k - 1}$$

Prof. Valeriu Braşoveanu, Colegiul « Gh.Rosca Codreanu » Barlad

Subiectul nr . 4

a) Să se determine o funcție $f : A \to A$, $A \subset R$, $A = (0, +\infty)$, care admite primitiva F ce verifică relația :

$$F(x) = \frac{f(x)}{nx+1}, \quad (\forall)x \in A, \quad n \in N^*$$

b) Pentru ce valoare a lui n, punctul $A(1, pe^2)$ aparțien graficului funcției găsite la punctul a, pentru p = constantă pozitivă.

Prof. Gianina Elena Busuioc, I.S.J. Vaslui