

A 54-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa județeană și a Municipiului București

8 martie 2003

CLASA A VIII-A

Subiectul 1

Fie ABC un triunghi echilateral. Pe planul (ABC) se ridică perpendicularele AA' și BB' de aceeași parte a planului, astfel încât $AA' = BB'$ și $BB' = \frac{1}{2}AB$. Determinați măsura unghiului dintre planele (ABC) și $(A'B'C)$.

Subiectul 2

Fie o mulțime finită $M \subset \mathbf{R}$ care are cel puțin două elemente. Spunem că funcția f are proprietatea \mathcal{P} dacă $f: M \rightarrow M$ și există $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ cu $f(x) = ax + b$.

- Arătați că există cel puțin o funcție cu proprietatea \mathcal{P} .
- Arătați că există cel mult două funcții cu proprietatea \mathcal{P} .
- Dacă M are 2003 elemente cu suma 0 și dacă există două funcții cu proprietatea \mathcal{P} , arătați că $0 \in M$.

Subiectul 3

Se consideră un tablou în formă de pătrat astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană să avem n căsuțe ($n \geq 2$) care se completează cu numere întregi. Determinați în câte moduri poate fi completat tabloul dacă produsul numerelor de pe fiecare linie și coloană este 5 sau -5 .

Subiectul 4

- Fie MNP un triunghi astfel încât $\angle MNP > 60^\circ$. Arătați că latura MP nu poate fi cea mai mică latură a triunghiului MNP .
- Într-un plan se consideră triunghiul echilateral ABC . Punctul V care nu aparține planului (ABC) este ales astfel încât $\angle VAB = \angle VBC = \angle VCA$. Arătați că dacă $VA = AB$, tetraedrul $VABC$ este regulat.

Timp de lucru: 3 ore