Version: **Romanian**

First Day
Tokyo July 13, 2003

Problema 1

Fie A o submulţime a mulţimii $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ care conţine exact 101 elemente. Demonstraţi că există numere $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ în S astfel încât mulţimile

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{pentru} \quad j = 1, 2, \ldots, 100,$$

să fie disjuncte două câte două.

Problema 2

Determinaţi toate perechile de numere naturale nenule (a, b) pentru care

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

este număr natural nenul.

Problema 3

Se consideră un hexagon convex în care orice două laturi opuse au proprietatea următoare: distanţa dintre mijloacele lor este de $\sqrt{3}/2$ ori suma lungimilor acestora.

Demonstraţi că toate unghiurile hexagonului sunt congruente (Un hexagon convex $ABCDEF$ are trei perechi de laturi opuse: AB şi DE, BC şi EF, CD şi FA) .

Timp de lucru: $4\frac{1}{2}$ ore
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Version: **Romanian**

Second Day
Tokyo July 14, 2003

Problema 4

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Punctele P, Q şi R sunt proiecţile punctului D pe dreptele BC, CA şi AB respectiv.

Arătaţi că $PQ = QR$ dacă şi numai dacă bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ şi $\angle ADC$ se intersectează pe AC.

Problema 5

Fie n un număr natural nenul şi fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale cu $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

(a) Demonstraţi că:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 .$$

(b) Arătaţi că egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formează o progresie aritmetică.

Problema 6

Fie p un număr prim. Demonstraţi că există un număr prim q astfel încât, pentru orice număr întreg n, numărul $n^p - p$ nu este divizibil prin q.

Timp de lucru: $4\frac{1}{2}$ ore
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.