OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-CLASA a VIII-a

1. Numerele reale strict pozitive x şi y verifică inegalitatea:
$2\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq\sqrt{(x+1)(y+4)}$. Calculați media geometrică a numerelor x şi y.

2. Dacă $x\in[-3;5]$ şi $y\in[-1;6]$, arătați că
$a=\sqrt{x^2+y^2+2xy-22x-22y+121}+\sqrt{x^2+y^2+2xy+8x+8y+16}$
este număr natural.

3. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată, cu baza ABC, M mijlocul laturii AC, $m(\sphericalangle BSM)=90^\circ$, $SA=a$ şi $AB=b$. $(a>0, b>0)$.

   a) Găsiți o relație între a şi b.

   b) Calculați distanța de la punctul C la planul (SAB).

   c) Calculați sinusul unghiului format de planele (SAB) şi (SMB).

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează cu 0- 7 puncte
Nu se acordă puncte din oficiu
Timp efectiv de lucru 2 ore

Barem de notare şi corectare –Olimpiada națională de matematică
Faza locală , 16 februarie 2013
Clasa a VIII-a

Subiectul I

Numerele reale strict pozitive x și y verifică inegalitatea:
$2\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq\sqrt{(x+1)(y+4)}$ **. Calculați media geometrică a numerelor x și y .**

Supliment, decembrie 2012

Ridicând la pătrat relația
$2\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq\sqrt{(x+1)(y+4)}$ *obținem* $4x+4\sqrt{xy}+y\geq xy+4x+y+4\Leftrightarrow 4\sqrt{xy}\geq xy+4$
....(2p)
$xy-4\sqrt{xy}+4\leq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy}-2\right)^2\leq 0$
....(2p)
Dar $\left(\sqrt{xy}-2\right)^2\geq 0$
....(1p)
Avem $\sqrt{xy}-2=0$
………………………………………………………….(1p)
Deci $\sqrt{xy}=2=m_g$
…………………………………………………………..(1p)

Subiectul II

Dacă $\boldsymbol{x} \in [-3; 5]$ și $\boldsymbol{y} \in [-1; 6]$, arătați că

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy - 22x - 22y + 121} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 8x + 8y + 16}$$

este număr natural.

$a = \sqrt{(x+y)^2 - 2 \cdot 11 \cdot (x+y) + 11^2} + \sqrt{(x+y)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (x+y) + 4^2}$
…………….(2p)

$a = \sqrt{(x+y-11)^2} + \sqrt{(x+y+4)^2} = |x+y-11| + |x+y+4|$
…………………..(2p)

Din $x \in [-3;5] \Rightarrow -3 \le x \le 5$

$\Rightarrow -4 \le x + y \le 11$

……………………………….(1p)

$y \in [-1;6] \Rightarrow -1 \le y \le 6$

$-4 \le x + y \Leftrightarrow 0 \le x + y + 4$ și $din\ x + y \le 11 \Rightarrow x + y - 11 \le 0$

..........................(1p)

$a = |x+y-11| + |x+y+4| = -x - y + 11 + x + y + 4 = 15 \in N$
………………..(1p)

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

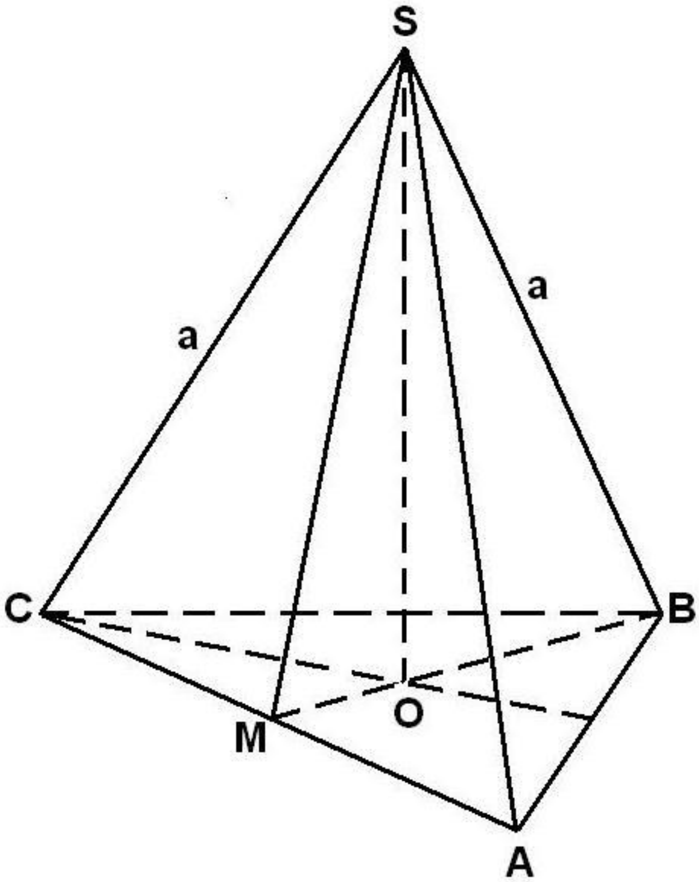
Subiectul III

Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată, cu baza ABC, M mijlocul laturii AC, $m(< BSM) = 90^{\circ}$, $SA = a$ și $AB = b$. $(a > 0, b > 0)$.

a) Găsiți o relație între a și b.

b) Calculați distanța de la punctul C la planul (SAB).

c) Calculați sinusul unghiului format de planele (SAB) și (SMB).



a) În ΔBSM dreptunghic în $S \overset{T.P.}{\Longrightarrow} BS^2 + SM^2 = BM^2$

$BM = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ (înălțime în Δ echilateral ABC)

....(0,5p)

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

$SM^2 = SC^2 - MC^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}$

………………………………………………………….(1p)

$a^2 + a^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3b^2}{4} \Rightarrow 2a^2 = \frac{4b^2}{4} \Rightarrow 2a^2 = b^2 \Rightarrow b = a\sqrt{2}$

……………………………...(1p)

b) În $\Delta BSC, avem\ SC^2 = a^2,$

$SB^2 = a^2, BC^2 = b^2 = 2a^2 \Rightarrow SC^2 + SB^2 = BC^2 \Rightarrow CS \perp SB$

(1p)

Analog $CS \perp SA;\ SB, SA \subset (SAB), SB \cap SA = \{S\} \Rightarrow CS \perp (ABS)$

……………….(1p)

c) $(SAB) \cap (SMB) = SB$

$MS \perp SB, MS \subset (SMB)$

$AS \perp SB, AS \subset (ASB)$ $(0{,}5p)$

Deci $[\sphericalangle (SAB), (SMB)] = (\sphericalangle MS, AS) = \sphericalangle MSA$

……………………………(1p)

$SM^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ MA = \frac{b}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SA = a \Rightarrow \Delta SMA\ dreptunghic\ isoscel$
$de\ bază\ SA \Rightarrow m(\sphericalangle MSA) = 45^\circ$ …………