MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Târgu Mureş, 3 aprilie 2024

CLASA a XII-a – soluţii şi barem orientativ de corectare

Problema 1. *Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu proprietatea că $f(x)+\sin(f(x))\geq x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Arătaţi că*

$$\int_0^\pi f(x)\,dx\geq\frac{\pi^2}{2}-2\,.$$

Soluţie.
Fie $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funcţia definită prin $g(x)=x+\sin(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci g este o funcţie continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $g'(x)>0$ pentru orice $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$. Rezultă că g este strict crescătoare pe fiecare interval $[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi]$, cu $k\in\mathbb{Z}$, deci g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. **2p**
Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, g este bijectivă, cu inversa $g^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de asemenea continuă şi strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. **1p**
Inegalitatea din ipoteză se transcrie atunci echivalent

$$g(f(x))\geq x\,,\ \text{pentru orice } x\in\mathbb{R}\iff f(x)\geq g^{-1}(x)\,,\ \text{pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

.... **1p**
Atunci

$$\int_0^\pi f(x)\,dx\geq\int_0^\pi g^{-1}(x)\,dx\,.$$

.... **1p**
Cum $g(0)=0$ şi $g(\pi)=\pi$, din identitatea lui Young avem

$$\int_0^\pi g^{-1}(x)\,dx=\pi\cdot g(\pi)-0\cdot g(0)-\int_0^\pi g(x)\,dx=$$

$$=\pi^2-\left(\frac{\pi^2}{2}-\cos(\pi)\right)+(0-\cos(0))=\frac{\pi^2}{2}-2\,.$$

.... **1p**
Obţinem astfel inegalitatea căutată:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx\geq\frac{\pi^2}{2}-2\,.$$

.... **1p**

Problema 2. *Fie* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un corp cu proprietatea că* $x^2y = yx^2$*, pentru orice* $x, y \in \mathbb{K}$*. Arătaţi că corpul* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *este comutativ.*

Soluţie.
Fie $Z(\mathbb{K}) = \{c \in \mathbb{K} \,|\, cx = xc, \forall x \in \mathbb{K}\}$ centrul corpului $\mathbb{K}$. Atunci $Z(\mathbb{K})$ este un subcorp al lui $\mathbb{K}$.
.... **1p**
Avem că $2 \cdot a = (a+1)^2 - a^2 - 1 \in Z(\mathbb{K})$, pentru orice $a \in \mathbb{K}$. **1p**
Dacă caracteristica $char(\mathbb{K})$ a corpului $\mathbb{K}$ este diferită de 2, atunci $2 \cdot 1$ este un element inversabil, aflat în centrul $Z(\mathbb{K})$, astfel că

$$a = (2 \cdot 1)^{-1} \cdot (2 \cdot a) \in Z(\mathbb{K})\,, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{K},$$

şi corpul $\mathbb{K}$ este comutativ. **1p**
Fie în continuare $char(\mathbb{K}) = 2$.
Pentru orice $a, b \in \mathbb{K}$ avem că $w = ab + ba = (a+b)^2 - a^2 - b^2 \in Z(\mathbb{K})$. **1p**
Cum $w \cdot ab = (ab)^2 + ab^2a = (ab)^2 + a^2b^2 \in Z(\mathbb{K})$, dacă $w \neq 0$, atunci $a, b \neq 0$ şi $ab = w^{-1} \cdot \left((ab)^2 + a^2b^2\right) \in Z(\mathbb{K})$. Atunci $a \cdot (ab) = (ab) \cdot a = a \cdot (ba)$, astfel că, simplificând la stânga cu a, obţinem că $ab = ba$.
Dacă $w = 0$, cum $1 = -1$, rezultă că $ab = -ba = ba$. **2p**
În concluzie, $ab = ba$ pentru orice $a, b \in \mathbb{K}$ şi corpul $\mathbb{K}$ este comutativ. **1p**

Problema 3. *Fie* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, cu* $f(1) = 0$*. Demonstraţi existenţa şi determinaţi valoarea limitei*

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \left(\frac{1}{1-t} \cdot \int_0^1 x\left(f(tx) - f(x)\right)\,dx \right).$$

Soluţie.
Fie $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţia definită prin $g(x) = xf(x)$ pentru orice $x \in [0,1]$. Fiind continuă, g admite primitive, şi fie $G : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ primitiva funcţiei g cu $G(0) = 0$. Atunci $g(1) = f(1) = 0$ şi

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = G(1)\,,$$

.... **1p**
iar

$$\int_0^1 xf(tx)\,dx = \frac{1}{t^2} \cdot \int_0^1 tg(tx)\,dx = \frac{1}{t^2} \cdot G(t)\,,$$

pentru orice $t \in (0,1]$. **2p**
Rezultă că

$$\frac{1}{1-t} \cdot \int_0^1 x\left(f(tx) - f(x)\right)\,dx = \frac{1}{1-t} \cdot \left(\frac{1}{t^2} \cdot G(t) - G(1)\right) = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{G(t) - t^2G(1)}{1-t}\,.$$

. . . . **1p**

Fie $u, v : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţiile definite prin $u(t) = G(t) - t^2 G(1)$, respectiv $v(t) = 1 - t$, pentru orice $t \in [0,1]$. Funcţiile u şi v sunt derivabile, cu $u'(t) = g(t) - 2tG(1)$, $v'(t) = -1$, pentru orice $t \in (0,1)$, şi verifică condiţiile:

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} u(t) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} v(t) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \frac{u'(t)}{v'(t)} = 2G(1) - g(1) = 2G(1).$$

. . . . **1p**

Cu regula lui l'Hôpital rezultă atunci că există limita

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \left(\frac{1}{1-t} \cdot \int_0^1 x\,(f(tx) - f(x))\; dx \right) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \frac{u(t)}{v(t)}$$

şi aceasta este egală cu

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \frac{u'(t)}{v'(t)} = 2G(1) = 2\int_0^1 x f(x)\, dx.$$

. . . . **2p**

Problema 4. *Fie $\mathbb{L}$ un corp finit, cu q elemente. Arătaţi că:*
a) Dacă $q \equiv 3 \pmod 4$ şi $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, este un număr natural divizibil prin $q-1$, atunci $x^n = (x^2+1)^n$ pentru orice element $x \in \mathbb{L}^*$.
b) Dacă există un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq 2$, astfel încât $x^n = (x^2+1)^n$ pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$, atunci $q \equiv 3 \pmod 4$ şi $q-1$ divide n.

Soluţie.
a) Deoarece grupul multiplicativ $\mathbb{L}^*$ are ordinul $q-1$, pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$ avem $x^{q-1} = 1$, şi cum n este un multiplu al lui $q-1$, rezultă că $x^n = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$. **1p**
Deoarece 4 nu divide ordinul $q-1$ al grupului $\mathbb{L}^*$, nu există în $\mathbb{L}^*$ elemente de ordin 4, astfel că $x^2 \neq -1$ pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$. Rezultă că $x^2+1 \neq 0$, deci $(x^2+1)^n = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$.
Prin urmare, $x^n = (x^2+1)^n$, pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$. **1p**

b) Dacă $char(\mathbb{L}) = 2$, ar rezulta că $1 = 1^n = (1^2+1)^n = 0$, ceea ce este fals. Prin urmare, q este impar.
Dacă $q \equiv 1 \pmod 4$, considerăm un generator a al grupului multiplicativ $\mathbb{L}^*$, şi fie $b = a^{\frac{q-1}{4}}$. Atunci b este un element de ordin 4 în $\mathbb{L}^*$, astfel că $b^2 \neq 1 = (b^2)^2$. Rezultă că $b^2 = -1$ şi obţinem că $b^n = (b^2+1)^n = 0$, ceea ce este fals. Prin urmare, $q \equiv 3 \pmod 4$. **2p**
Considerăm submulţimile $A = \{x + x^{-1} | \, x \in \mathbb{L}^*\}$ şi $H = \{x \in \mathbb{L}^* | \, x^n = 1\}$. Deoarece $\mathbb{L}^*$ este

comutativ, H este un subgrup al lui $\mathbb{L}^*$. Conform ipotezei, pentru orice $y \in A$ există $x \in \mathbb{L}^*$ cu $y = x + x^{-1} = x^{-1}(x^2+1)$, astfel că $y^n = x^{-n}(x^2+1)^n = 1$. Rezultă că $A \subseteq H$. **1p**

Fie $f : \mathbb{L}^* \longrightarrow A$ funcţia definită prin $f(x) = x + x^{-1}$. Din definiţia mulţimii A, f este surjectivă, astfel că

$$\mathbb{L}^* = \bigcup_{y \in A} f^{-1}(y)$$

şi rezultă că

$$q - 1 = |\mathbb{L}^*| = \sum_{y \in A} \left| f^{-1}(y) \right|.$$

. . . . **1p**

Fie $u, v \in \mathbb{L}^*$ care verifică egalitatea $f(u) = f(v)$. Echivalent, avem

$$u + u^{-1} = v + v^{-1} \Longleftrightarrow u - v = v^{-1} - u^{-1} \Longleftrightarrow (u-v)(uv-1) = 0 \Longleftrightarrow v \in \{u, u^{-1}\}.$$

Cum $u = u^{-1} \Longleftrightarrow u^2 = 1 \Longleftrightarrow u \in \{1, -1\}$, rezultă că

$$|f^{-1}(2 \cdot 1)| = |f^{-1}(f(1))| = 1, \quad |f^{-1}(2 \cdot (-1))| = |f^{-1}(f(-1))| = 1$$

şi

$$|f^{-1}(y)| = 2, \qquad \text{pentru orice } y \in A \setminus \{2 \cdot 1, 2 \cdot (-1)\}.$$

Obţinem că

$$q - 1 = |\mathbb{L}^*| = 1 + 1 + 2 \cdot (|A| - 2) = 2 \cdot |A| - 2,$$

astfel că $|A| = \frac{q+1}{2}$. Cum $A \subseteq H$, avem atunci că $|H| \geq \frac{q+1}{2} > \frac{1}{2} \cdot |\mathbb{L}^*|$. Cum H este un subgrup al lui $\mathbb{L}^*$, rezultă atunci că $H = \mathbb{L}^*$. Prin urmare, $x^n = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$.

Considerând un generator a al grupului $\mathbb{L}^*$, avem că $ord(a) = q - 1$ şi $a^n = 1$, de unde rezultă că $q - 1$ divide n. **1p**