<u>CLASA A X-A</u>

1. a) Să se demonstreze că $x^3-3x+2\geq 0$ pentru orice $x\geq -2.$

b) Fie $a,b,c>1.$ Să se arate că $\log_a\left(b^{2013}-2b+2\right)+\log_b\left(c^{2013}-2c+2\right)+\log_c\left(a^{2013}-2a+2\right)\geq 3.$

2. Se consideră mulțimea $A=\{z\in □ \ / \ |z|=1\}.$

a) Să se arate că $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2013}\in A.$

b) Să se arate că pentru orice $z_1,z_2\in A$ avem $z_1\cdot z_2\in A..$

c) Să se determine $z_1,z_2,z_3\in A$ astfel încât $z_1+z_2+z_3=3.$

3. a) Fie $f: □ \to □ ,\ f(n)=n+(-1)^n$. Să se arate că $f\left(f(n)\right)=n,$ pentru orice $n\in □$. Este f bijectivă ? Justificare.

b) Să se arate că $g: □ \to □ ,\ g(n)=\left[n\sqrt{2}\right]$ este injectivă dar nu este surjectivă, unde $\left[n\sqrt{2}\right]$ reprezintă partea întreagă a numărului $n\sqrt{2}.$

4. Fie A o mulțime de numere reale care verifică simultan condițiile:

(i) $2013\in A$

(ii) $2x\in A$ pentru orice $x\in A$

(iii) $[\log_2 x]\in A$ pentru orice $x\in A,$

unde $[\log_2 x]$ reprezintă partea întreagă a numărului $\log_2 x.$

a) Să se arate că $1\in A.$

b) Să se arate că $n\in A$ pentru orice număr natural n .

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect rezolvat complet se punctează cu 7 puncte.

BAREME

CLASA A X-A

1. a) se ajunge la $(x-1)^2(x+2)\geq 0$ (3p)

   b) $\log_a\left(b^{2013}-2b+2\right)+\log_b\left(c^{2013}-2c+2\right)+\log_c\left(a^{2013}-2a+2\right)\geq$
$\log_a\left(b^{3}-2b+2\right)+\log_b\left(c^{3}-2c+2\right)+\log_c\left(a^{3}-2a+2\right)\geq \log_a b+\log_b c+\log_c a\geq 3.$ (4p)

2. a) (2p)

   b) (2p)

   c) fie $z_i=\cos\alpha_i+i\sin\alpha_i, i\in\{1,2,3\}$. Se ajunge la $\cos\alpha_1+\cos_2+\cos\alpha_3=3,$ deci $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=\cos\alpha_3=1,$ deci $z_1=z_2=z_3=1.$ (3p)

3. a) $f\left(f(n)\right)=n,\ n\in\mathbb{N}$ (2p), deci f este inversabilă cu $f^{-1}=f$, deci f este bijectivă. (2p)

   b) dacă g nu ar fi injectivă, ar exista $n,m\in\mathbb{N}, n>m$ cu $\left[n\sqrt{2}\right]=\left[m\sqrt{2}\right],$ deci $n\sqrt{2}-m\sqrt{2}<1,$

fals (2p) ; ecuația $g(n)=3$ (de exemplu) nu are soluții (1p)

4. a) $\left[\log_2 2013\right]=10\in A\Rightarrow\left[\log_2 10\right]=3\in A\Rightarrow\left[\log_2 3\right]=1\in A$ (3p)

   b) inductiv $2^n\in A$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ (2p); de aici $n=\left[\log_2 2^n\right]\in A$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ (2p)