OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $a_{ij} > 0$, $(\forall) i, j = \overline{1,n}$. Arătaţi că, dacă produsul dintre suma elementelor aflate pe linia i, cu suma elementelor aflate pe coloana j este egal cu a_{ij}, $(\forall) i, j = \overline{1,n}$, atunci suma tuturor elementelor matricei A este egală cu 1.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 2. Să se determine matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ care au proprietățile:

i. $\det X = 0$;

ii. $X^3 - 6X^2 + 12X = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n+2^k} = 0$.

Problema 4. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi funcţia $g : [a, a+1) \to [a, a+1)$, $g(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a$. Să se determine toate funcțiile $f : [a, a+1) \to \mathbb{R}$ care au proprietățile:

i. $f(x) - g(x) - 2(f \circ g)(x) + (f \circ g \circ g)(x) = a - 2x + \sqrt{x-a}$, $\forall x \in [a, a+1)$;

ii. funcția f este continuă în $x = a$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.