Barem de notare – clasa a VIII-a

Problema 1. a) Determinaţi numerele reale a,b,c ştiind că $a^2+b^2+c^2=14$ şi $2a+4b+6c=28$.

b) Fie $t=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right)$, unde a şi b sunt numere întregi. Dacă *t* este număr raţional calculaţi $x=a|b|+b|a|$.

Soluţie:

a) Din relaţiile date obţinem: $2a+4b+6c=a^2+b^2+c^2+14$ **1p**

Relaţia de mai sus se scrie: $\left(a^2-2a+1\right)+\left(b^2-4b+4\right)+\left(c^2-6c+9\right)=0$ **1p**

Rezultă: $\left(a-1\right)^2+\left(b-2\right)^2+\left(c-3\right)^2=0$ **1p**

Cum fiecare termen al sumei este nenegativ $\Rightarrow a-1=b-2=c-3=0$. **0,5p**

Deci: $a=1, b=2, c=3$. **0,5p**

b) Numărul dat se scrie: $t=\left(2a+3b\right)+\sqrt{6}\left(a+b\right)$..**0,5p**

Rezultă: $\sqrt{6}\left(a+b\right)=t-\left(2a+3b\right)$..**0,5p**

Deoarece membrul drept al egalităţii este număr raţional $\Rightarrow\sqrt{6}\left(a+b\right)\in\mathbb{Q}$ **0,5p**

Cum $\left(a+b\right)\in\mathbb{Z}$ şi $\sqrt{6}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\Rightarrow a+b=0\Rightarrow b=-a$ **1p**

Obţinem $x=a|-a|-a|a|=0$ **0,5p**

Problema 2. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x^2+1}{3}+\frac{3x^2+1}{4}+\cdots+\frac{2015x^2+1}{2016}=2015.$$

Soluţie:

Ecuaţia dată este echivalentă cu:

$$\left(\frac{x^2+1}{2}-1\right)+\left(\frac{2x^2+1}{3}-1\right)+\left(\frac{3x^2+1}{4}-1\right)+\cdots+\left(\frac{2015x^2+1}{2016}-1\right)=0$$ ……….……..**2p**

După efectuarea calculelor în fiecare paranteză obţinem:

$$\frac{x^2-1}{2}+\frac{2x^2-2}{3}+\frac{3x^2-3}{4}+\cdots+\frac{2015x^2-2015}{2016}=0$$ …………………………**1p**

Scoatem factor comun la număratori, unde este cazul, şi obţinem:

$$\frac{x^2-1}{2}+\frac{2(x^2-1)}{3}+\frac{3(x^2-1)}{4}+\cdots+\frac{2015(x^2-1)}{2016}=0$$ …………………………..**1p**

Scoatem x^2-1 factor comun şi avem:

$$(x^2-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2015}{2016}\right)=0$$ ………… **1p**

Dar al doilea factor este un număr pozitiv, fiind o sumă de numere strict pozitive. ……….**1p**

Deci $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

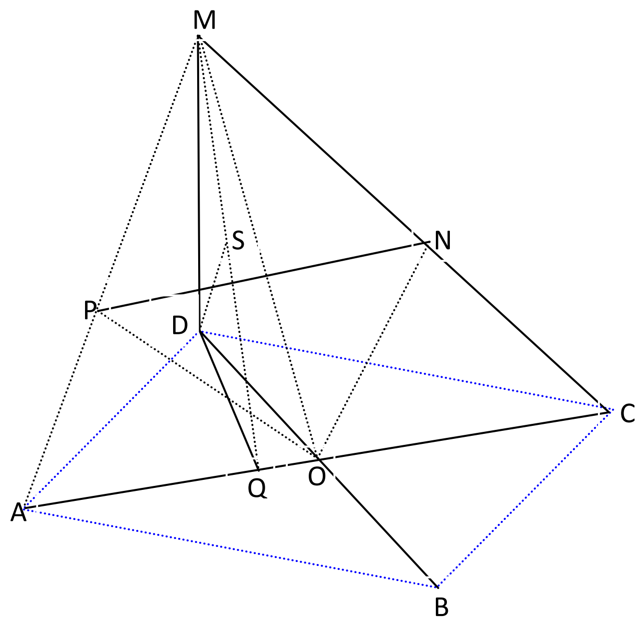
Obţinem: $S=\{1;-1\}$ …………………………… **1p**

Problema 3. În vârful D al dreptunghiului ABCD se duce perpendiculara pe planul acestuia, pe care se ia un punct M. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ şi $[ON$ este bisectoarea $\sphericalangle MOC$, N∈(MC). Considerăm un punct P∈(MA) astfel încât proiecţia lui P pe dreapta ON este punctul O.

Dacă AB=4cm, BC=3cm şi d(M, AC)= $\frac{12}{5}\sqrt{2}$ determinanţi:

a) măsura unghiului dintre PN și planul (ABC);

b) distanţa de la punctul D la planul (MAC).



Soluţie:

a) $m(\sphericalangle AOP) = 180^0 - 90^0 - m(\sphericalangle NOC) = 90^0 - m(\sphericalangle NOM) = m(\sphericalangle POM) \Rightarrow [OP$ bisectoarea $\sphericalangle MOA$ **1p**

Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile MOC respectiv MOA obţinem:

$\frac{MN}{NC} = \frac{MO}{OC}$ respectiv $\frac{MP}{PA} = \frac{MO}{OA}$ **1p**

Dar $OC = OA \Rightarrow \frac{MN}{NC} = \frac{MP}{PA} \xrightarrow{T.R.Th} PN \parallel AC$ **0,5p**

Cum $PN \parallel AC, AC \subset (ABC) \Rightarrow PN \parallel (ABC) \Rightarrow m\sphericalangle[PN,(ABC)] = 0^0$ **0,5p**

b) Fie $DQ \perp AC$. Cum $MD \perp (ABC), DQ \cap AC = \{Q\} \xrightarrow{T_{3\perp}} MQ \perp AC$ ………………..**1p**

Avem $DQ \perp AC, MQ \perp AC$ şi fie $DS \perp MQ, MQ \cap AC = \{Q\} \xrightarrow{T.R.T_{3\perp}} DS \perp (MAC)$

Rezultă că $d[D,(MAC)] = DS$ ………………………………………………………….**1p**

În $\triangle ADC$ folosind $T.P$ şi $T.h_2$ obţinem: $AC = 5$ şi $DQ = \frac{12}{5}$ …………………………..**1p**

În $\triangle MDQ \Rightarrow \cos Q = \frac{DQ}{MQ} \Rightarrow \cos Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m\sphericalangle(MQD) = 45^0$ ……………………......**0,5p**

$\triangle MDQ$ dreptunghic isoscel în D şi cum $[DS]$ înălţime $\Rightarrow [DS]$ mediană.

Deci $DS = \frac{MQ}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$ ……………………………………………………………**0,5p**

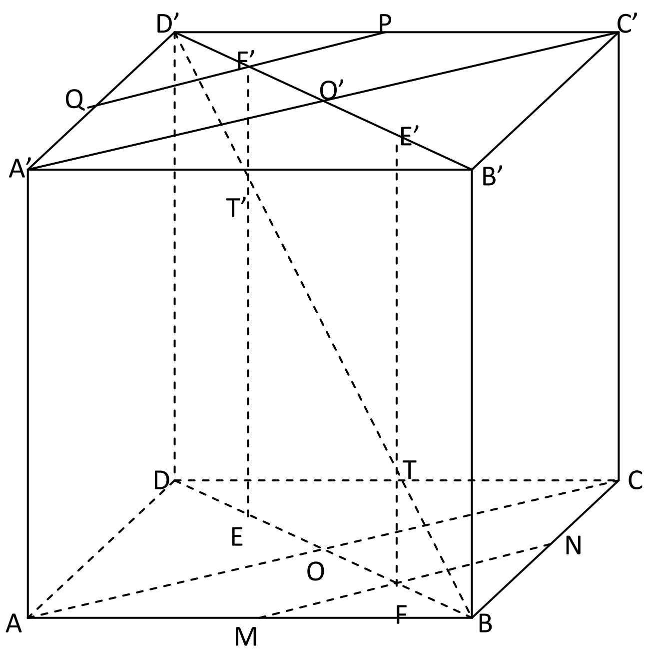
Problema 4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Considerăm punctele $E \in (BD)$ astfel încât $BD = 4DE$ şi $E' \in (B'D'$ astfel încât $D'E' = 3B'E'$. Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor $AB, BC, D'C'$, respectiv $A'D'$, arătaţi că:

a) Planele (EPQ) şi $(E'MN)$ sunt paralele;

b) Dacă $BD' \cap (E'MN) = \{T\}$ şi $BD' \cap (EPQ) = \{T'\}$, atunci $TT' = 2BT$.

Gazeta matematică

Soluţie:



a) Fie $MN \cap BD = \{F\}, QP \cap B'D' = \{F'\}, \ AC \cap BD = \{O\}, A'C' \cap B'D' = \{O'\}$.

În $\triangle ABC, [MN]$ linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AC (1)$. Analog în $\triangle A'D'C' \Rightarrow QP \parallel A'C' (2)$...............**1p**

Din relaţiile (1),(2) şi cum $AC \parallel A'C' \Rightarrow QP \parallel MN (3)$...**0,5p**

În $\triangle ABC, [MN]$ linie mijlocie, $[BO]$ ceviană $\xrightarrow{prop.} F$ mijlocul $[BO]$.................................**0,5p**

Analog în $\triangle A'D'C'$ obţinem F' mijlocul segmentului $D'O'$..**0,5p**

Din $B'E' = \dfrac{D'E'}{3} \Rightarrow B'E' = \dfrac{B'D'}{4} = \dfrac{O'B'}{2} \Rightarrow E'$ mijlocul lui $[B'O']$...**0,5p**

Cum $DE = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{2DO}{4} = \dfrac{DO}{2} \Rightarrow E$ mijlocul lui $[DO]$ **0,5p**

Obţinem $EF = E'F'$ şi cum $EF \parallel E'F' \Rightarrow EFE'F'$ paralelogram $EF' \parallel E'F$ (4)………….**1p**

Din relaţiile (3) şi (4), obţinem conform teoremei planelor paralele că $(EPQ) \parallel (E'MN)$...**0,5p**

b) Avem : $BD' \cap E'F = \{T\}, E'F \subset (E'MN) \Rightarrow T \in (E'MN)$

$BD' \cap EF' = \{T'\}, EF' \subset (EPQ) \Rightarrow T' \in (EPQ)$ ………………………**0,5p**

În $\triangle BET', TF \parallel T'E \xrightarrow{T.Th} \dfrac{BT}{TT'} = \dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BF}{2BF} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BT = 2TT'$ **1,5p**