OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

21.02.2016

CLASA a V-a

SOLUŢII ŞI BAREME

Subiectul 1

a) Calculaţi: $13^5 : 13^2 + \{(17^3)^5 : 17^{14} + 2 \cdot [(2^3 \cdot 5^2)^4 : 100^4 + 253 : 23]\} - (2^8 - 2^2)$.

b) Arătaţi că numărul $x = \overline{74a} + \overline{4a7} + \overline{a74}$ este divizibil cu 37, oricare ar fi cifra nenulă *a*.

Soluţie

a) $13^5:13^2 = 13^3 = 2197$ 0,5p

$(17^3)^5:17^{14} = 17$ 1p

$(2^3 \cdot 5^2)^4:100^4 = 2^4 = 16$ 1p

$2^8 - 2^2 = 256 - 4 = 252$ 0,5p

Răspuns final: 2016 .... 1p

b) $x = 740 + a + 407 + 10a + 100a + 74$ 1p

$x = 1221 + 111a$ 1p

$x = 37 \cdot (33 + 3a) \vdots 37$ 1p

Subiectul 2

a) Aflaţi restul împărţirii numărului $a = 2017 + 2\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + 2016)$ la 2016.

b) Arătaţi că suma primelor 2017 numere impare este pătrat perfect.

c) Scrieţi numărul 2017^2 ca sumă de 2017 numere naturale consecutive.

Soluţie

a) $1 + 2 + 3 + ... + 2016 = 2016\cdot2017:2$ 1p

$a = 2017^2$ 1p

Finalizare: $R = 1$ 1p

b) $1 = 2\cdot0 + 1$; $3 = 2\cdot1 + 1$; $5= 2\cdot 2 + 1$; ...; $4033 = 2\cdot2016 + 1$ 1p

$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 4033 = 2017^2$ este pătrat perfect 1p

c) $a + (a + 1) + (a + 2) + ...+ (a + 2016) = 2017^2$ 1p

$a = 1009 \Rightarrow 2017^2 = 1009 + 1010 + 1111 + ... + 3025$ 1p

Subiectul 3

Să se determine numerele naturale a şi b a căror sumă este egală cu 323, ştiind că împărţindu-l pe a la b se obţine câtul 16 şi restul nenul.

Soluţie

$a + b = 323$ 1p

$a = 16b + r, \quad 0 < r < b$ ………………………………………………………………….. 1p

$17b + r = 17 \cdot 19 \Longrightarrow r \,\vdots\, 17 \Longrightarrow r = 17k, k \in \boldsymbol{N}^*$ 1p

$17b + 17k = 17 \cdot 19 \Longrightarrow b + k = 19$ 1p

$r < b \Longrightarrow 17k < b \Longrightarrow 18k < b + k = 19 \Longrightarrow k = 1$ 1p

Finalizare: $a = 305$ şi $b = 18$ …………………………………………………………….. 2p

Subiectul 4

Un număr natural se numeşte *cub bipătratic* dacă este cub perfect şi se scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule diferite. Un număr natural se numeşte *pătrat bicubic* dacă este pătrat perfect şi se scrie ca suma a două cuburi perfecte nenule diferite.

a) Daţi un exemplu de cub bipătratic şi un exemplu de pătrat bicubic.

b) Arătaţi că există o infinitate de cuburi bipătratice şi o infinitate de pătrate bicubice.

Soluţie

a) Exemplu de cub bipătratic: 125 .... 1p

Justificare: $5^3 = 10^2 + 5^2$ 1p

Exemplu de pătrat bicubic: 9 .... 1p

Justificare: $3^2 = 1^3 + 2^3$ 1p

$b)$ $(10k^3)^2 + (5k^3)^2 = 100k^6 + 25k^6 = 125k^6 = (5k^2)^3, k \in \boldsymbol{N}^*$.................................. 1p

Există o infinitate de cuburi bipătratice $a_k = (5k^2)^3 = (10k^3)^2 + (5k^3)^2, k \in \boldsymbol{N}^*$ 0,5p

$(p^2)^3 + (2p^2)^3 = p^6 + 8p^6 = 9p^6 = (3p^3)^2, p \in \boldsymbol{N}^*$.. 1p

Există o infinitate de pătrate bicubice $b_p = (3p^3)^2 = (p^2)^3 + (2p^2)^3, p \in \boldsymbol{N}^*$ 0,5p