



INSPECTORATUL
ȘCOLAR AL
JUDEȚULUI
VÂLCEA



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL I

- a) Să se rezolve ecuația $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$.
- b) Dacă $x \in [2, \infty)$ să se calculeze $\lceil \log_{[x]} x \rceil$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .

Soluție:

a) $9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x}$ 1p

Notăm $3^{\log_2 x} = t, t > 0, x > 0$. Ecuația devine $t^2 = x^2 \cdot t - t$ 1p

$3^{\log_2 x} = x^2 - 1$ 1p

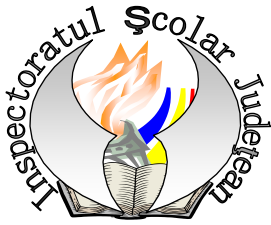
Soluție unică $x = 2$ 1p

b) Fie $[x] = k, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$k \leq x < k+1 \Leftrightarrow k \leq x < k^2$ 1p

$\log_{[x]} k \leq \log_{[x]} x < \log_{[x]} k^2 \Leftrightarrow 1 \leq \log_{[x]} x < 2$ 1p

Finalizare $\lceil \log_{[x]} x \rceil = 1$ 1p



INSPECTORATUL
ȘCOLAR AL
JUDEȚULUI
VÂLCEA



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

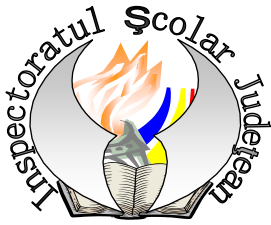
**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL II

Să se rezolve ecuația $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$.

Soluție:

Notăm $\sqrt[3]{2x-1} = t$ și avem că $t^3 = 2x-1$	1p
$2t = x^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 = 2t - 1$	1p
$t^3 - x^3 = 2x - 2t$	1p
$x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$	4p



INSPECTORATUL
ȘCOLAR AL
JUDEȚULUI
VÂLCEA



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL III

Numerele distincte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ au modulele egale. Considerăm numerele $a = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}, b = \frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3},$

$c = \frac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}$. Să se arate că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = -1$ atunci $a = b = c$.

Soluție:

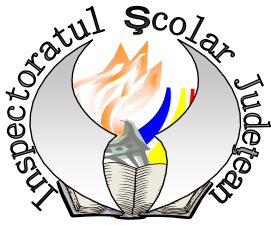
$\bar{a} = -a; \bar{b} = -b; \bar{c} = -c$ 2p

a, b, c sunt numere complexe pur imaginare 1p

$a = ix; b = iy; c = iz$ 1p

$\left(\frac{1+ix}{-1+ix}\right)\left(\frac{1+iy}{-1+iy}\right)\left(\frac{1+iz}{-1+iz}\right) = 1$ 2p

Deoarece $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ și $xy + yz + zx = 1$ rezultă că $x = y = z$, adică $a = b = c$ 1p



INSPECTORATUL
ȘCOLAR AL
JUDEȚULUI
VÂLCEA



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL IV

Determinați numerele $a, b, c \in [-2, 2]$ cu $a \leq b \leq c$ și $n \in \mathbb{N}^*$ știind că $a + b + c = -3$, $a^3 + b^3 + c^3 = -15$,
 $a \leq b \leq c$ și $a^n + b^n + c^n = 8n + 1$.

Soluție:

Considerăm numerele reale x, y, z a.î. $\sin x = \frac{a}{2}$, $\sin y = \frac{b}{2}$, $\sin z = \frac{c}{2}$.

$$a + b + c = -3 \Leftrightarrow \sin x + \sin y + \sin z = -\frac{3}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -15 \Leftrightarrow \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z = -\frac{15}{8} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sin 3x + \sin 3y + \sin 3z = 3(\sin x + \sin y + \sin z) - 4(\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z) = 3 \dots\dots\dots 1p$$

Cum $\sin 3x, \sin 3y, \sin 3z \in [-1, 1]$ rezultă că $\sin 3x = \sin 3y = \sin 3z = 1 \dots\dots\dots 1p$

$$\sin 3x = 1 \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 1 = 0 \text{ cu soluțiile } \sin x = -1, \sin x = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

Deci $a, b, c \in \{-2, 1\}$ și din condițiile impuse avem că $a = b = -2$ și $c = 1 \dots\dots\dots 1p$

$$a^n + b^n + c^n = 8n + 1 \Leftrightarrow (-2)^n = 4n \text{ cu soluția unică } n = 4 \dots\dots\dots 1p$$