OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A

SUBIECTUL I

a) Să se rezolve ecuația $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$.

b) Dacă $x \in [2, \infty)$ să se calculeze $\left[\log_{[x]} x\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

Soluție:

a) $9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x}$ 1p

Notăm $3^{\log_2 x} = t, t > 0, x > 0$. Ecuația devine $t^2 = x^2 \cdot t - t$ 1p

$3^{\log_2 x} = x^2 - 1$ 1p

Soluție unică $x = 2$ 1p

b) Fie $[x] = k, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$k \le x < k+1 \Leftrightarrow k \le x < k^2$ 1p

$\log_{[x]} k \le \log_{[x]} x < \log_{[x]} k^2 \Leftrightarrow 1 \le \log_{[x]} x < 2$ 1p

Finalizare $\left[\log_{[x]} x\right] = 1$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A

SUBIECTUL II

Să se rezolve ecuația $2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1$.

Soluţie:

Notăm $\sqrt[3]{2x-1}=t$ și avem că $t^3=2x-1$ 1p

$2t=x^3+1 \Leftrightarrow x^3=2t-1$ 1p

$t^3-x^3=2x-2t$ 1p

$x_1=1,\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 4p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A

SUBIECTUL III

Numerele distincte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ au modulele egale. Considerăm numerele $a = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$, $b = \dfrac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3}$, $c = \dfrac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}$. Să se arate că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = -1$ atunci $a = b = c$.

Soluţie:

$\bar{a} = -a; \bar{b} = -b; \bar{c} = -c$ 2p

a, b, c sunt numere complexe pur imaginare 1p

$a = ix; b = iy; c = iz$ 1p

$\left(\dfrac{1+ix}{-1+ix}\right)\left(\dfrac{1+iy}{-1+iy}\right)\left(\dfrac{1+iz}{-1+iz}\right) = 1$.. 2p

Deoarece $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şi $xy + yz + zx = 1$ rezultă că $x = y = z$, adică $a = b = c$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A

SUBIECTUL IV

Determinați numerele $a, b, c \in [-2, 2]$ cu $a \le b \le c$ și $n \in \mathbb{N}^*$ știind că $a+b+c=-3$, $a^3+b^3+c^3=-15$, $a \le b \le c$ și $a^n+b^n+c^n=8n+1$.

Soluţie:

Considerăm numerele reale x, y, z a.î. $\sin x = \frac{a}{2}, \sin y = \frac{b}{2}, \sin z = \frac{c}{2}$.

$a+b+c=-3 \Leftrightarrow \sin x+\sin y+\sin z=-\frac{3}{2}$ 1p

$a^3+b^3+c^3=-15 \Leftrightarrow \sin^3 x+\sin^3 y+\sin^3 z=-\frac{15}{8}$ 1p

$\sin 3x+\sin 3y+\sin 3z=3(\sin x+\sin y+\sin z)-4(\sin^3 x+\sin^3 y+\sin^3 z)=3$ 1p

Cum $\sin 3x, \sin 3y, \sin 3z \in [-1,1]$ rezultă că $\sin 3x=\sin 3y=\sin 3z=1$ 1p

$\sin 3x=1 \Leftrightarrow 4\sin^3 x-3\sin x+1=0$ cu soluțiile $\sin x=-1, \sin x=\frac{1}{2}$ 1p

Deci $a,b,c \in \{-2,1\}$ și din condițiile impuse avem că $a=b=-2$ și $c=1$ 1p

$a^n+b^n+c^n=8n+1 \Leftrightarrow (-2)^n=4n$ cu soluția unică $n=4$ 1p