INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VI-a

Problema 1. Arătaţi că $0,(03) < \frac{1}{1953} + \frac{1}{1954} + ... + \frac{1}{2013} < 0,(3)$.

Carmen Firicescu, Corabia

Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale pozitive ecuaţia:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+5}{3} + \frac{x+11}{4} + \frac{x+19}{5} + \frac{x+29}{6} + \frac{x+41}{7} + \frac{x+55}{8} + \frac{x+71}{9} + \frac{x+89}{10} = 45.$$

Gazeta Matematică nr. 10/2013

Problema 3. Determinaţi numerele prime $a < b < c$ care verifică relaţia

$$13a + 65b + 289c = 6622.$$

Costel Anghel, Negreni

Problema 4. Fie unghiurile neadiacente AOC şi AOB astfel încât $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle AOC)} = 1,5$. Se ştie că măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 30°.

a) Determinați măsurile celor doua unghiuri.

b) Arătați ca $(OA$ şi $(OB$ sunt semidrepte opuse.

Nicolae Bivol,Corabia

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore şi 30 de minute.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VI-a

Soluţii şi bareme de corectare

Problema 1.

Avem $\frac{1}{2013} < \frac{1}{1953} = \frac{1}{1953}$, $\frac{1}{2013} < \frac{1}{1954} < \frac{1}{1953}$, ...$\frac{1}{2013} = \frac{1}{2013} < \frac{1}{1953}$ (4p)

Adunand relatiile obtinem:

$\frac{61}{2013} < S < \frac{61}{1953}\,(1p) \Rightarrow \frac{1}{33} < S < \frac{61}{1953} < \frac{651}{1953}\,(1p) \Rightarrow 0,(03) < S < 0,(3)$ (1p)

Problema 2.

Avem:$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$ (1p)

Ecuatia se poate scrie:

$\left(\frac{x+1}{2} - 1\right) + \left(\frac{x+5}{3} - 2\right) + \left(\frac{x+11}{4} - 3\right) + \left(\frac{x+19}{5} - 4\right) + \left(\frac{x+29}{6} - 5\right) + \left(\frac{x+41}{7} - 6\right) + + \left(\frac{x+55}{8} - 7\right) + \left(\frac{x+71}{9} - 8\right) + \left(\frac{x+89}{10} - 9\right) = 0 \ (3p)$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{4} + \cdots + \frac{x-1}{10} = 0 \ (1p)$ $\Rightarrow (x-1)\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{10}\right)}_{\neq 0}$=0 (1p)

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \ (1p)$

Problema 3.

Numerele a,b,c nu pot fi toate impare deoarece membrul stang al egalitatii ar fi un numar impar,ce nu poate fi egal cu 6622.Deci putem avea un singur numar par sau toate pare.(2p)

Daca toate trei ar fi pare am avea a=b=c=2 care nu verifica (1p)

Deci un singur numar este par.Cum $a < b < c \Rightarrow a = 2$. (1p)

Obtinem:$65b + 289c = 6596$.Cum 6596=$17 \cdot 388$ si $289 = 17^2$,trebuie ca b sa fie un multiplu al lui 17.Dar b este numar prim, de unde b=17. (2p).Inlocuind se obtine c=19 (1p)

Problema 4.

a) Avem:$\frac{m(<AOB)}{m(<AOC)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{m(<AOB)}{3} = \frac{m(<AOC)}{2} = k \Rightarrow m(< AOB) = 3k \; si \; m(< AOC) = 2k,$

Deci $(OC \; este \; in \; Int(< AOB)$ (2p)

Daca (OM este bisectoarea $< AOC \Rightarrow m(< AOM) = m(< MOC) = k$ (1p)

Daca (ON este bisectoarea $< AOB \Rightarrow m(< AON) = m(< NOB) = \frac{3k}{2}$ (1p)

Atunci $m(< MON) = \frac{3k}{2} - k = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 30^0 \Rightarrow k = 60^0$ (1p)

Avem $m(< AOC) = 120^0 \; si \; m(< AOB) = 180^0$ (1p)

b)Din $m(< AOB) = 180^0 \Rightarrow (OA \; si \; (OB$ sunt semidrepte opuse. (1p)