



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală - 22 februarie 2014 - Maramureș

Clasa a XII-a

1. Să se calculeze:

a) $\int \frac{2x+9}{x \cdot (x+3) \cdot (x+6) \cdot (x+9) + a^2} dx$, unde $x > 0$ și $a \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{3x-4}{e^{3x} - x + 1} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

2. a) Determinați primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ știind că $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + f(x)$ este injectivă.

b) Arătați că orice funcție bijectivă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, nu are primitive și nu e integrabilă pe $[a, b]$.

3. Fie (G, \cdot) un grup finit de ordin impar și H un subgrup propriu, necomutativ, al lui G . Să se arate că există două elemente distincte din $G \setminus H$ care comută.

(G.M.9/2013)

4. Fie (G, \cdot) un grup finit. Să se arate că dacă $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^2$ este automorfism al lui G , atunci grupul este comutativ și G are un număr impar de elemente.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate și prelucrate de:

prof. Boroica Gabriela, C.N. "V. Lucaciu", Baia Mare

prof. Petruțiu Crina, C.N. "Gh. Șincai", Baia Mare

prof. Boroica Gheorghe, C.N. "Gh. Șincai", Baia Mare