

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a VIII-a - Soluții și barem

Problema 1. Demonstrați că există o infinitate de mulțimi formate din patru numere naturale nenule care au proprietatea că suma oricăror trei elemente ale mulțimii este pătrat perfect.

Soluție:

Evident, dacă $\{a, b, c, d\}$ este o mulțime cu proprietatea din enunț, atunci și mulțimea $\{n^2a, n^2b, n^2c, n^2d\}$ este, pentru orice număr natural nenul n , o mulțime cu proprietatea dorită, deci este suficient să găsim o asemenea mulțime. **1p**

Cum putem găsi o asemenea mulțime?

Dacă $a+b+c = x^2$, $a+b+d = y^2$, $a+c+d = z^2$, $b+c+d = t^2$, cu $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, atunci prin adunare obținem $3(a+b+c+d) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, de unde $a = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - t^2$,

$b = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - z^2$, $c = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - y^2$, $d = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - x^2$. .. **2p**

Pentru ca aceste numere să fie naturale și nenule, trebuie să alegem x, y, z, t astfel încât $3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ și $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 3 \max\{x^2, y^2, z^2, t^2\}$. Există multe alegeri convenabile pentru x, y, z, t . De exemplu $\{x, y, z, t\} = \{8, 9, 10, 11\}$ conduce la $\{a, b, c, d\} = \{1, 22, 41, 58\}$ **4p**

Notă: Găsirea unei mulțimi cu proprietatea dorită, chiar și fără a indica modul de găsire a ei va fi punctată cu **6p**.

Problema 2. Fie a, b, c, d numere naturale astfel încât $a + b + c + d = 2018$. Aflați valoarea minimă a expresiei

$$E = (a - b)^2 + 2(a - c)^2 + 3(a - d)^2 + 4(b - c)^2 + 5(b - d)^2 + 6(c - d)^2.$$

Soluție:

Arătăm că minimul căutat este 14.

Această valoare într-adevăr atinsă, de exemplu dacă $a = b = 505$ și $c = d = 504$ **1p**
Deoarece 2018 nu este divizibil cu 4, numerele a, b, c, d nu pot fi toate egale.

Dacă trei dintre ele sunt egale, atunci trei dintre pătrate sunt 0, iar celelalte trei sunt nenule. În plus, cele patru numere trebuie să aibă aceeași paritate, deci celelalte pătrate sunt cel puțin 4. Astfel $E \geq 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 > 14$ **2p**

Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt diferite (de acestea două și diferite între ele), atunci $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 14$ **1p**

Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt și ele egale, atunci:

$a = b, c = d$ implică $E \geq 2 + 3 + 4 + 5 = 14$, $a = c, b = d$ implică $E \geq 1 + 3 + 4 + 6 = 14$, iar $a = d, b = c$ implică $E \geq 1 + 2 + 5 + 6 = 14$ **2p**

În fine, dacă a, b, c, d sunt diferite două câte două atunci $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 > 14$.
..... **1p**

Problema 3. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $ab + bc + ca = 3$. Demonstrați că

$$\frac{a}{a^2 + 7} + \frac{b}{b^2 + 7} + \frac{c}{c^2 + 7} \leq \frac{3}{8}.$$

Soluție:

Scriem $\frac{a}{a^2 + 7} = \frac{a}{a^2 + ab + bc + ca + 4} = \frac{a}{(a + b)(a + c) + 4}$ **2p**

Din inegalitatea mediilor, $(a + b)(a + c) + 4 \geq 2\sqrt{(a + b)(a + c)} \cdot 2 = 4\sqrt{(a + b)(a + c)}$.
..... **2p**

Deoarece $a + b > 0$, $a + c > 0$ ($a + b = 0$ ar implica $a = b = 0$ și ar contrazice $ab + bc + ca = 3$), putem scrie $\frac{a}{a^2 + 7} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{(a + b)(a + c)}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{a}{a + b} \cdot \frac{a}{a + c}}$.

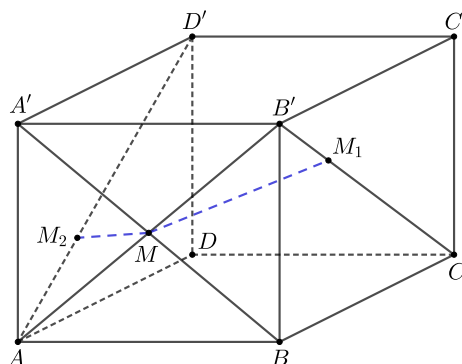
Aplicând din nou inegalitatea mediilor obținem $\frac{a}{a^2 + 7} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{a}{a + b} + \frac{a}{a + c} \right)$. Analog se obțin relațiile $\frac{b}{b^2 + 7} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{b}{b + c} + \frac{b}{b + a} \right)$ și $\frac{c}{c^2 + 7} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{c}{c + a} + \frac{c}{c + b} \right)$ **2p**

Prin adunarea acestor trei inegalități se obține inegalitatea din enunț. **1p**
(Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.)

Problema 4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ notăm cu M centrul feței $ABB' A'$. Notăm cu M_1 și M_2 proiecțiile lui M pe dreptele $B' C$ și respectiv AD' . Demonstrați că:

- a) $[MM_1] \equiv [MM_2]$;
- b) dacă $(MM_1 M_2) \cap (ABC) = d$, atunci $d \parallel AD$;
- c) $m(\angle((MM_1 M_2), (ABC))) = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BB'}{BC} + \frac{BC}{BB'}$.

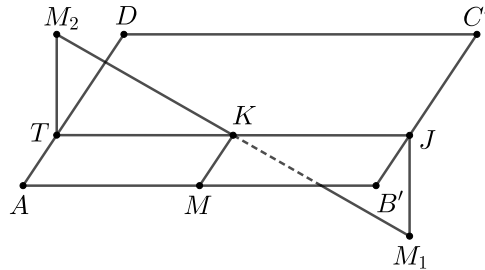
Soluție:



a) Triunghiurile $AB' C$ și $B' AD'$ sunt congruente (L.L.L.), deci $\angle AB' C \equiv \angle B' AD'$. Cum $[MB'] \equiv [MA]$, $\angle MB' M_1 \equiv \angle MAM_2$ și $\angle MM_1 B' \equiv \angle MM_2 A$, triunghiurile $MM_2 A$ și $MM_1 B'$ sunt congruente (I.U.) și de aici $[MM_1] \equiv [MM_2]$ **1p**

b) Construim $M_1 J \perp B' C'$, $J \in B' C'$ și $M_2 T \perp AD$, $T \in AD$. Atunci $M_1 J \parallel M_2 T$

(ambele perpendiculare pe (ABC)). În plus, $B'M_1 = AM_2$ și $\angle M_1B'J \equiv \angle M_2AT$ implică $\Delta M_1B'J \equiv \Delta M_2AT$ (I.U.), deci $M_1J = M_2T$. Rezultă că M_1JM_2T este paralelogram. Fie K punctul de intersecție a diagonalelor sale. Dar $AT = B'J$ și $AT \parallel B'J$ implică $ATJB'$ - paralelogram, deci $MK \parallel AT$. Cum $MK \subset (MM_1M_2)$ și $AT \subset (ABC)$, rezultă că $d \parallel AD$ **3p**



c) Fie $MM_1 \cap AC = \{L\}$ și $MM_2 \cap (ABC) = \{S\}$. Atunci $AS \parallel BD \parallel B'D'$ deoarece $B'D' \subset (AB'D')$, $B'D' \parallel BD$ și $BD \subset (ABC)$. Deci $d = LS$. Fie $AV \perp LM_1$. Atunci triunghiurile AVM și $B'M_1M$ sunt congruente (I.U.), deci $AV = B'M_1 = AM_2$. Din $AV \parallel B'C$ rezultă că $\angle LAV \equiv \angle ACB' \equiv \angle AD'B' \equiv \angle SAM_2$ (alterne interne deoarece $AS \parallel B'D'$). Atunci triunghiurile AVL și AM_2S sunt congruente (C.U.), deci $AL = AS$. Dacă U este mijlocul lui $[LS]$, cum $AU \perp LS$ și $AB \perp LS$ rezultă A, B, U coliniare. Planul (MAB) este planul mediator al lui $[LS]$, deci $MU \perp LS$ și $AU \perp LS$. Cum $MU \subset (MM_1M_2)$ și $AU \subset (ABC)$, deducem că $m(\angle((MM_1M_2), (ABC))) = m(\angle MUA)$. Atunci $m(\angle MUA) = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{BB'}{2} = \frac{AB}{2} + AU \Leftrightarrow BB' - AB = 2AU$. Dacă $BI \perp B'C$, $I \in B'C$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă $AI \perp B'C$. În triunghiul $BB'C$ avem $BI = \frac{BB' \cdot BC}{B'C}$, deci $AI^2 = AB^2 + \frac{BC^2 \cdot B'B^2}{BC^2 + B'B^2}$, $CI^2 = AB^2 + BC^2 - AI^2$, adică $CI = \frac{BC^2}{\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$. În triunghiul LM_1C , $AI \parallel LM_1$, $M_1I = B'M_1$, deci $\frac{LA}{AC} = \frac{M_1I}{CI} = \frac{B'M_1}{CI}$. Cum $B'M_1 = \frac{B'B^2}{2\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$, rezultă $LA = \frac{B'B^2}{2BC^2} \cdot \sqrt{AB^2 + BC^2}$. Deoarece $\Delta AUL \sim \Delta CDA$ deducem că $\frac{AU}{AL} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + BC^2}}$, deci $AU = \frac{AB \cdot B'B^2}{2BC^2}$. Atunci $m(\angle MUA) = 45^\circ \Leftrightarrow 2AU = \frac{AB \cdot B'B^2}{BC^2} = B'B - AB \Leftrightarrow AB \cdot B'B^2 + AB \cdot BC^2 = BC^2 \cdot B'B \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BB'}{BC} + \frac{BC}{BB'}$ **3p**

