MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 22 februarie 2014
CLASA a X– a

1. a. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}-[x]$ este injectivă.

b. Să se rezolve ecuaţia $\left[x^2\right]-[x]=\left\{x^2\right\}-\{x\}$.

Ludovic Longaver

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$4^x\cdot 9^{\frac{1}{x}}+9^x\cdot 4^{\frac{1}{x}}+6^{x+\frac{1}{x}}=108.$$

3. Numerele complexe z_1,z_2,z_3 verifică relaţiile

$|2z_1-z_2-z_3|=|z_2-z_3|$ si $|2z_2-z_1-z_3|=|z_1-z_3|$.

Să se demonstreze că $z_1=z_2$

4. a. Să se arate că $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3\cdot x]$ pentru orice $x\in R$.

b. Să se rezolve ecuaţia: $\{\log_{27}x\}+\{\log_{27}3x\}+\{\log_{27}9x\}=3\log_{27}x-2$.

.

Ludovic Longaver

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de către:

prof. Bojor Meda, Colegiul Naţional „Gheorghe Șincai”, Baia Mare.
prof. Longaver Ludovic, Liceul Teoretic „Nemeth Laszlo”, Baia Mare.
prof. Bojor Florin, Colegiul Naţional „Gheorghe Șincai”, Baia Mare.

BAREM DE CORECTARE
CLASA a X-a

1. **a.** Funcţia poate fi adusă la forma: $f(x)=x-2\cdot[x]$.
$(f\circ f)(x)=f(x)-2\cdot[f(x)]=x-2\cdot[x]-2\cdot[x-2\cdot[x]]=x-4\cdot[x]+4\cdot[x]=x, \forall x\in R$,
ceea ce înseamnă că f este bijectivă. ………………………………………………….**3p**

b. $[x^2]-[x]=\{x^2\}-\{x\}\Leftrightarrow\{x^2\}-[x^2]=\{x\}-[x]\Leftrightarrow f(x^2)=f(x)$.
Pe baza injectivităţii funcţiei f obţinem $x^2=x\Rightarrow x\in\{0,1\}$……….………………….**4p**

2. Dacă $x<0$ atunci $4^x\cdot 9^{\frac{1}{x}}+9^x\cdot 4^{\frac{1}{x}}+6^{x+\frac{1}{x}}<1+1+1=3$ deci nu avem solutii…………**2p**
Dacă $x>0$ aplicând inegalitatea mediilor avem
$4^x\cdot 9^{\frac{1}{x}}+9^x\cdot 4^{\frac{1}{x}}+6^{x+\frac{1}{x}}\geq 3\sqrt[3]{4^x\cdot 9^{\frac{1}{x}}\cdot 9^x\cdot 4^{\frac{1}{x}}\cdot 6^{x+\frac{1}{x}}}=3\cdot 6^{x+\frac{1}{x}}\geq 3\cdot 6^2=108$
si are loc egalitate dacă si numai dacă $x=1$ …………………………………………..**5p**

3. Notăm $a=z_1-z_3$ şi $b=z_2-z_3, a,b\in\mathbb{C}$. Relaţiile se rescriu
$|2a-b|=|b|$ si $|2b-a|=|a|$………………………………………………………………….**2p**
Dacă $a=0$ atunci $b=0\Rightarrow z_1=z_2$ q.e.d…………………………………………………**2p**
Dacă $a\neq 0$ atunci notăm cu $c=\dfrac{b}{a}$ si se obţine $|2-c|=|c|$ si $|2c-1|=c$ de unde
obţinem $c=1$ adică $a=b\Leftrightarrow z_1=z_2$ ……………………………………………………**3p**

4. **a.** Relaţia este particularizarea identităţii lui Hermite pentru $n=3$ **2p**

b. $\{\log_{27}x\}+\{\log_{27}3x\}+\{\log_{27}9x\}=3\log_{27}x-2\Leftrightarrow$
$\log_{27}x-[\log_{27}x]+\log_{27}3x-[\log_{27}3x]+\log_{27}9x-[\log_{27}9x]=3\log_{27}x-2\Leftrightarrow$
$\log_{27}27x^3-[\log_{27}x]-[\log_{27}3x]-[\log_{27}9x]=3\log_{27}x-2\Leftrightarrow$
$[\log_{27}x]+[\log_{27}3x]+[\log_{27}9x]=3\Leftrightarrow$
$[\log_{27}x]+\left[\log_{27}x+\dfrac{1}{3}\right]+\left[\log_{27}x+\dfrac{2}{3}\right]=3\Leftrightarrow[3\log_{27}x]=3\Leftrightarrow$
$3\leq 3\log_{27}x<4\Leftrightarrow 1\leq\log_{27}x<\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 27\leq x<81\Leftrightarrow x\in[27,81)$……………………………..**5p**