INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a VIII-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

a) Dacă $a \in [-2,3]$ şi $a+2=5b$, atunci expresia $E=\sqrt{a^2+2b^2+4a+4}+\sqrt{a^2+2b^2-6a-4b+11}$ are valoare constantă.

(selectată de prof. Mureşan Marius şi Csatlos Mihai – Liceul Tehnologic „Octavian Goga" Jibou)

b) Fie $x, y \in Z$ astfel încât $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)<0$ şi $\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y-\sqrt{10}\right)<0$. Aflaţi $|x-y|^{2015}$

(autor prof. Vlaicu Daniela – Şcoala Gimnazială „Gheorghe Lazăr" Zalău)

Soluţie

a) Scrie $E=\sqrt{a^2+4a+4+2b^2}+\sqrt{a^2-6a+9+2b^2-4b+2}$

apoi $E=\sqrt{(a+2)^2+2b^2}+\sqrt{(a-3)^2+2(b-1)^2}$ ....*1 punct*

înlocuind $a+2=5b$ se obţine $E=\sqrt{27b^2}+\sqrt{27(b-1)^2}=\sqrt{27}(|b|+|b-1|)$. ....*1 punct*

$$-2\le a\le 3/+2 \Leftrightarrow 0\le a+2\le 5/:5 \Leftrightarrow 0\le \frac{a+2}{5}\le 1 \Rightarrow 0\le b\le 1 \Rightarrow |b|=b$$

Finalizare: *din* $0\le b\le 1/-1 \Rightarrow -1\le b-1\le 0 \Rightarrow |b-1|=1-b$ .... *1 punct*

Atunci $E=\sqrt{27}\,(b+1-b)=3\sqrt{3}=const$

b) Din $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)<0 \Rightarrow \begin{cases} x-\sqrt{2}<0 \\ x-\sqrt{5}>0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x-\sqrt{2}>0 \\ x-\sqrt{5}<0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)$ Cum

$x\in Z \Rightarrow x=2$ ………………… *1,5 puncte*

Din $\left(y-\sqrt{5}\right)\left(y-\sqrt{10}\right)<0 \Rightarrow \begin{cases} y-\sqrt{5}<0 \\ y-\sqrt{10}>0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} y-\sqrt{5}>0 \\ y-\sqrt{10}<0 \end{cases} \Rightarrow y \in \left(\sqrt{5},\sqrt{10}\right)$ Cum $y \in Z \Rightarrow y=3$

………………… 1,5 puncte

Deci $|x-y|^{2015}=1$ *………………… 1 punct*

PROBLEMA 2

a) Stabiliţi valoarea numerelor reale $x, y, z \in R$, care satisfac relaţia:

$$x^2+y^2+z^2=4x-6y+10z-38$$

b) Numerele reale nenule a şi b verifică egalitatea $a^2b^{-2}-3a^{-2}b^2=2$. Să se arate că a şi b nu pot fi simultan numere raţionale.

(Gazeta Matematică)

Soluţie

a) $\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+6y+9\right)+\left(z^2-10z+25\right)=0$ deci $\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2+\left(z-5\right)^2=0$

…………………………………………………………………1 punct

Finalizare: $x=2, y=-3, z=5$ *…………………………………………………………….1 punct*

b) $\frac{a^2}{b^2}-3\frac{b^2}{a^2}=2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}-2+\frac{b^2}{a^2}-4\frac{b^2}{a^2}=0$ *……………………………………………1 punct*

$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2-\left(2\frac{b}{a}\right)^2=0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+2\frac{b}{a}\right)=0$ *……………………1 punct*

$\left(\frac{a}{b}-3\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$ *…………………………………………………………….1 punct*

Cazul I: $\frac{a}{b}=3\frac{b}{a} \Rightarrow a=\pm b\sqrt{3}$ şi Cazul II: $\frac{a}{b}=-\frac{b}{a} \Rightarrow a^2=-b^2$, imposibil............*1 punct*

Deci $a=\pm b\sqrt{3}$ de unde a şi b nu pot fi simultan numere raţionale......................*1punct*

PROBLEMA 3

Arătaţi că dacă $a^2+b^2+c^2<1$, atunci $ab+bc+ca \in \left(-\frac{1}{2},1\right)$

Selectată de prof. Szabo Otilia – Şcoala Gimnazială „Andrei Mureşanu” Cehu Silvaniei)

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Soluţie

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ ....*2 puncte*

$0 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ si $a^2 + b^2 + c^2 < 1 \Rightarrow ab + bc + ca > -\frac{1}{2}$ ....*2 puncte*

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$ .... *2 puncte*

Finalizare $ab + bc + ca < 1$ ....*1 punct*

PROBLEMA 4

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $BC = 12$ cm, $AA' = 18$ cm se consideră pe muchia $[A'B']$ punctul N, astfel încât $A'N = 3 \cdot B'N$ şi $P \in (AA')$. Determinaţi lungimea AP astfel încât pentru orice $M \in [BC]$ triunghiul MNP să fie dreptunghic în N.

(Gazeta Matematică)

Soluţie

$BC \perp (ABB'), PN \subset (ABB') \Rightarrow PN \perp BC, PN \perp BN$
$\Rightarrow PN \perp (BMN) \Rightarrow PN \perp BN$ ....*2 puncte*

$NA' = 9\sqrt{3}, NB' = 3\sqrt{3}$ ....*1 punct*

Notând $A'P = x \Rightarrow PN^2 = x^2 + 243$ ....*1 punct*

$BN^2 = 324 + 27 = 351$ ....*1 punct*

$PB^2 = (18 - x)^2 + (12\sqrt{3})^2 = 324 - 36x + x^2 + 432 = 756 - 36x + x^2$ ....*1 punct*

Triunghiul MNP este dreptunghic în $N \Rightarrow 756 - 36x + x^2 = x^2 + 243 + 351$

$\Rightarrow x = 4,5cm$ .... *1 punct*