# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
# ETAPA LOCALĂ
# 22 februarie 2014

## CLASA a VI-a

**SUBIECTUL I (7p)**

**Să se determine numerele naturale nenule a şi b cu proprietăţile: $a+b=2014$ şi $[a,b]=(a,b)\cdot 682$, unde $[a,b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b, iar $(a,b)$ este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.**

**SUBIECTUL II (7p)**

**Numerele naturale a,b,m verifică relaţia $2a + 6b - 5m = 0$. Arătaţi că $a^2 + b^2$ se divide cu 5.**

**G.M. nr. 9/2013**

**SUBIECTUL III (7p)**

**Fie A şi B două puncte în plan astfel încât AB=1m, $M_1$ este mijlocul segmentului [AB], $M_2$ este mijlocul segmentului $[AM_1]$, $M_3$ este mijlocul segmentului $[AM_2]$ şi aşa mai departe, $M_n$ este mijlocul segmentului $[AM_{n-1}]$ pentru orice număr natural nenul n.**

a) **Calculaţi lungimea segmentului $[M_5M_4]$.**
b) **Determinaţi numărul n cel mai mic pentru care lungimea segmentului $[AM_n]$ să fie mai mică de 1mm.**

**SUBIECTUL IV (7p)**

**Se dau punctele coliniare A, O, B, în această ordine, şi punctele C şi D de o parte şi alta a dreptei AB, astfel încât $m(\widehat{COD}) = 90^0$ şi $m(\widehat{AOC}) = 4m(\widehat{AOD})$. Dacă [OM este bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$ şi [ON este bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$, se cere:**

a) **Determinaţi măsura unghiului $\widehat{DOM}$;**
b) **Determinaţi măsura unghiului $\widehat{MON}$.**

**Notă:**

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timp de lucru: 2 ore**

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
# ETAPA LOCALĂ
# 22 februarie 2014

**CLASA a VI-a**

**Bareme de corectare**

**Subiectul I**

Notăm $d = (a,b)$; atunci există numerele naturale nenule p şi q astfel încât $a = pd$, $b = qd$ şi $(p,q) = 1$. 1 p

Se obţine $[a,b] = pqd$ şi proprietăţile din ipoteză devin:

$pd + qd = 2014$ şi $pqd = 682d \Rightarrow pq = 682$ şi $(p + q)$ divide 2014, $2014 = 2\cdot19\cdot53$. 1 p

Dar $682 = 2\cdot11\cdot31 = pq$, $(p,q) = 1$. 1 p

Dacă $p = 2 \Rightarrow q = 341 \Rightarrow p + q = 343 = 7^3$, nu divide 2014.

Dacă $p = 11 \Rightarrow q = 62 \Rightarrow p + q = 73$, nu divide 2014.

Dacă $p = 31 \Rightarrow q = 22 \Rightarrow p + q = 53$, care divide 2014. 2 p

Cum celelalte cazuri posibile revin tot la acestea, schimbând a cu b, singura situaţie convenabilă este $p = 31$, $q = 22$, de unde $d = 2014:(p+q)=2014:53 = 38$. 1 p

Se obţine $a = 31\cdot38 = 1178$ şi $b = 22\cdot38 = 836$. 1 p

**Subiectul II**

$2a + 6b - 5m = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 5(m – b)$ se divide cu 5 1p

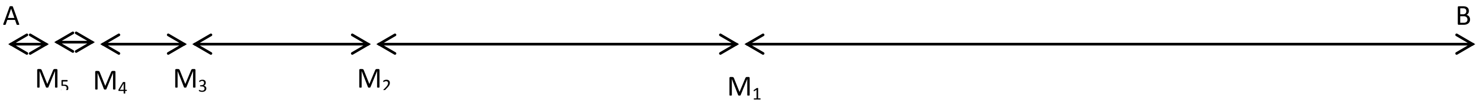
$\Rightarrow 2a(2a + b) = 4a^2 + 2ab$ se divide cu 5

$b(2a + b) = 2ab + b^2$ se divide cu 5 $\Rightarrow (4a^2 + 2ab) – (2ab + b^2) = 4a^2 - b^2$ se divide cu 5; cum $5b^2$ se divide cu $5 \Rightarrow 4a^2 - b^2 + 5b^2 = 4(a^2 + b^2)$ se divide cu 5. 5p

Dar $(4,5) = 1$, de unde $a^2 + b^2$ se divide cu 5. 1p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

**Subiectul III**




a) $AB = 1m = 1000mm$

$AM_1 = AB : 2 = 500mm$

$AM_2 = AM_1 : 2 = AB : 2^2 = 250mm$, $AM_3 = AM_2 : 2 = AB : 2^3 = 125mm$

$AM_4 = AM_3 : 2 = AB : 2^4 = 62,5mm$, $AM_5 = AM_4 : 2 = AB : 2^5 = 31,25mm$

$M_5M_4 = AM_5 = 31,25mm$ 2p

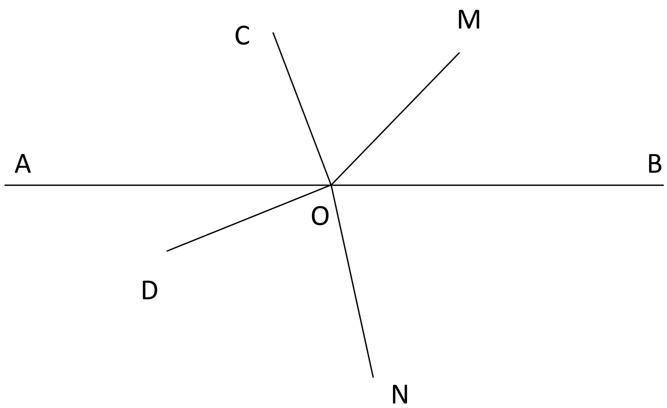
b) Se observă că $AM_n = AB : 2^n$ 2p

$\Rightarrow AM_n < 1mm \Leftrightarrow 2^n > AB$, $AB = 1000mm$ 1p

$2^{10} = 1024$

$2^9 = 512$ $\Rightarrow n = 10$ este cea mai mică valoare. 2p

**Subiectul IV**




$m(\widehat{AOC}) = 4m(\widehat{AOD})$

$m(\widehat{COD}) = 90^0$ $\Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 90^0 : 5 = 18^0, m(\widehat{AOC}) = 4m(\widehat{AOD}) = 72^0$ 3p

$m(\widehat{BOC}) = 180^0 - m(\widehat{AOC}) = 108^0 \Rightarrow m(\widehat{COM}) = 54^0 \Rightarrow m(\widehat{DOM}) = 90^0 + 54^0 = 144^0$

2p

$m(\widehat{BOD}) = 180^0 - m(\widehat{AOD}) = 162^0 \Rightarrow m(\widehat{BON}) = 81^0 \Rightarrow m(\widehat{MON}) = 54^0 + 81^0 = 135^0$

2p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro