Clasa a X-a

1. **a)** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Demonstrați că $a = b = c$.

b) Rezolvați ecuația $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$ în mulțimea numerelor reale.

2. **a)** Fie $z, w \in \mathbb{C}$. Demonstrați că $|z - w|^2 + |z - \mathrm{iw}|^2 + |\mathrm{z} + \mathrm{w}|^2 + |\mathrm{z} + \mathrm{iw}|^2 = 4|\mathrm{z}|^2 + 4|\mathrm{w}|^2$.

b) Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1 și M un punct situat pe cercul circumscris pătratului. Demonstrați că $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4$.

3. **a)** Fie $x, y > 0$. Demonstrați că $(x + y)^4 \geq 8xy(x^2 + y^2)$.

b) Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2016} > 0$ astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2016}^2 \geq 1$. Demonstrați că:

$$\frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} + \frac{(a_2 + a_3)^4}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{(a_{2015} + a_{2016})^4}{a_{2015} a_{2016}} + \frac{(a_{2016} + a_1)^4}{a_{2016} a_1} \geq 16.$$

4. **a)** Demonstrați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in (-1, +\infty)$ are loc inegalitatea $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

b) Determinați $x \in \left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$ pentru care

$$\frac{\lg(1 + 2x)}{2} + \frac{\lg(1 + 3x)}{3} + \frac{\lg(1 + 4x)}{4} + \frac{\lg(1 + 5x)}{5} = 4 \lg(1 + x).$$