

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A V-A

15 februarie 2015

**(7p).1.** Ana, Barbu , Cristian și Dragoș au împreună o suma S de lei ,astfel incat  $1782 < S < 2303$  , S multiplu de 403. Ana are cu 2 lei mai puțin decât Dragoș, Barbu are cu 4 lei mai mult decât Ana, iar Dragoș are jumătate din suma lui Cristian. Aflați câți lei are fiecare copil.

**(7p). 2.** Prin împărțirea numerelor naturale  $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$ , scrise în baza 10, la același număr natural nenul, se obțin câturile b, c, respectiv a și resturile c, a, respectiv b.

a) Determinați împărțitorul.

b) Arătați că numărul  $\overline{abc}$  este multiplu de 111.

**(7p).3.** Timp de 10 de zile, Andreea a plantat flori. În fiecare zi a plantat de două ori mai multe flori decât în ziua precedent. Știind că în prima zi a plantat o floare, aflați:

a) Câte flori a plantat în a șaptea zi? Dar în total?

b) În câte și în care zile a plantat Andreea un număr pătrat perfect de flori?

**(7p). 4.** Arătați că numărul  $78^{2015} + 68^{2015}$  este divizibil cu 73.

GM

Timp de lucru 2 ore

Toate subiectele se noteaza 7 puncte

**Barem**

**FAZA LOCALĂ ,clasa a Va**

**FEBRUARIE 2015**

**(7p).1.** Ana, Barbu , Cristian și Dragoș au împreună o suma S lei,  $1782 < S < 2303$ , S multiplu de 403. Ana are cu 2 lei mai puțin decât Dragoș, Barbu are cu 4 lei mai mult decât Ana, iar Dragoș are jumătate din suma lui Cristian. Aflați care este suma fiecărui copil.

Soluție:

Notăm cu a, b,c,d sumele copiilor astfel încât,  $S = M_{403}$ ,  $1782 < M_{403} < 2303$ ,  
 $S=2015$ ,  $a+b+c+d=2015$  2p

Astfel, se pot exprima relațiile  $a=d-2$ ,  $b=a+4$ ,  $d=c:2$  1p

de unde avem că  $a=d-2$ ,  $b=d+2$  și  $c=2d$  1p

$d-2+d+2+2d+d=2015 \Rightarrow 5d=2015 \Rightarrow d=403$  2p

$\Rightarrow a=401$ ,  $b=405$ ,  $c=806$  1p

**(7p). 2.** Prin împărțirea numerelor naturale  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{ca}$ , scrise în baza 10, la același număr natural nenul, se obțin câturile b, c, respectiv a și resturile c, a, respectiv b.

a) Determinați împărțitorul.

b) Arătați că numărul  $\overline{abc}$  este multiplu de 111.

Soluție:

a) Din **TÎR**:  $D = \hat{I} \cdot C + R$ ,  $R < \hat{I}$ , rezultă:

$\overline{ab} = x \cdot b + c \Rightarrow 10a + b = x \cdot b + c$  1p

$\overline{bc} = x \cdot c + a \Rightarrow 10b + c = x \cdot c + a$  1p

$\overline{ca} = x \cdot a + b \Rightarrow 10c + a = x \cdot a + b$ , 1p

iar prin adunare membru cu membru rezultă  $11(a+b+c) = (x+1)(a+b+c)$  de unde  $x=10$ . 1p

b) Se arată că  $a=b=c$  prin înlocuirea lui x cu 10 în relațiile din TÎR , de unde rezultă divizibilitatea cu 111. 3p

**(7p).3.** Timp de 10 de zile, Andreea a plantat flori. În fiecare zi a plantat de două ori mai multe flori decât în ziua precedentă. Știind că în prima zi a plantat o floare, aflați:

a) Câte flori a plantat în a șaptea zi? Dar în total?

**b)** În câte și în care zile a plantat Andreea un număr pătrat perfect de flori?

Soluție:

- a) Scrierea șirului ce reprezintă numărul de flori plantate zilnic  
 $1, 2^1, 2^2, \dots, 2^9$  1p  
În a șaptea zi a plantat  $2^6$  flori, adică 64 plante. 1p  
Calculul sumei  $1+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9=2^{10}-1$   
În total a plantat :  
 $1+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9=2^{10}-1=1024-1=1023$ (flori) 2p
- b) Termenii șirului de la punctul a)  
 $1=1^2, 2^2, 2^4, \dots, (2^2)^2, 2^6=(2^3)^2$  și  $2^8=(2^4)^2$  sunt pătrate perfecte 2p  
Deci, în prima zi, a treia zi, a cincea zi, a șaptea zi și a noua zi s-au plantat un număr pătrat perfect de flori, în total în cinci zile. 1p

**(7p). 4.** Arătați că numărul  $78^{2015}+68^{2015}$  este divizibil cu 73.

Soluție:

- Folosind formulele:  $(a+b)^n = M_a + b^n$  2p  
și  $(a-b)^{2n+1} = M_a - b^{2n+1}$  2p  
Rezultă că:  
 $78^{2015} = (73+5)^{2015} = M_{73} + 5^{2015}$  și  $68^{2015} = (73-5)^{2015} = M_{73} - 5^{2015}$  2p  
care prin adunare conduc la divizibilitatea cerută. 1p