OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 24 februarie 2024

Clasa a V - a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

Determinaţi cifrele a, b, c pentru care următoarea relaţie este adevărată:

$$3 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot \overline{bc} + c = 2024$$

(SGM 9 - 2023)

$3 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot \overline{bc} + c = 2024 \Leftrightarrow 300a + 50b + 6c = 2024$ **1p**

$\mathrm{u}(300\mathrm{a} + 50\mathrm{b} + 6\mathrm{c}) = \mathrm{u}(6\mathrm{c}) \Rightarrow \mathrm{u}(6\mathrm{c}) = 4 \Rightarrow$ c poate fi 4 sau 9 .... **2p**

Dacă $c = 4$ atunci $300a + 50b = 2000 \Rightarrow 6a + b = 40 \Rightarrow a = 6, b = 4$ **2p**

Dacă $c = 9$ atunci $300a + 50b = 1970 \Rightarrow 30a + 5b = 197$ (imposibil) **2p**

SUBIECTUL II

Fie numerele $a = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{49} : \left(2^{3^0} + 8^{100} : 32^{20} - 1^{2024} - 2024^0\right)$

și $b = 2023 \cdot 1985 - 2023 \cdot 1980 - 5 \cdot 2022$

a) Arătaţi că $a = 2^{1025}$

b) Determinați ultimele 1001 cifre ale numărului $a \cdot b^{1000}$

a) $a = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{49} : \left(2^{3^0} + 8^{100} : 32^{20} - 1^{2024} - 2024^0\right)$

$a = 2^{1225} : (2 + 2^{300} : 2^{100} - 1 - 1)$ **2p**

$\mathrm{a} = 2^{1225} : 2^{200} = 2^{1025}$ **1p**

b) $\mathrm{b} = 5$ **1p**

$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^{1000} = 2^{1025} \cdot 5^{1000} = 2^{25} \cdot 10^{1000}$ **1p**

$\mathrm{u}(2^{25}) = u(2^{4 \cdot 6 + 1}) = 2$ **1p**

Atunci $a \cdot b^{1000}$ are ultimele 1001 cifre o cifră de 2 urmată de 1000 de cifre de 0 .... **1p**

SUBIECTUL III

a) Arătați că $26^2 + 39^2 = 13^3$

b) Scrieți numărul 1521^{2023} ca diferență dintre un cub perfect și un pătrat perfect.

a) $26^2 + 39^2 = 13^3 \Leftrightarrow 676 + 1521 = 2197$ **2p**

b) $1521^{2023} = 1521^{2022} \cdot 1521 = 1521^{2022} \cdot (2197 - 676)$ **1p**

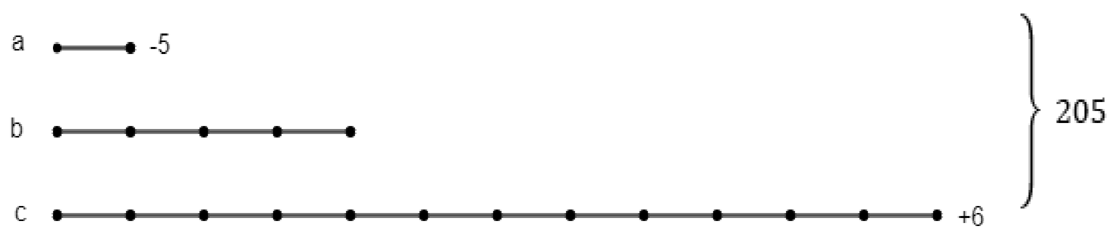
$= 1521^{2022} \cdot (13^3 - 26^2)$ **1p**

$= 1521^{2022} \cdot 13^3 - 1521^{2022} \cdot 26^2$ **1p**

$= (1521^{674} \cdot 13)^{\mathbf{3}} - (1521^{1011} \cdot 26)^{\mathbf{2}}$ **2p**

SUBIECTUL IV

Alex a scris pe tablă trei numere naturale care au suma 205. Adunând 5 la primul număr obține un număr de 4 ori mai mic decât al doilea număr și împărțind al treilea număr la al doilea număr obține câtul 3 și restul 6. Ce numere a scris Alex pe tablă?



.... **3p**

Egalăm părțile: 205-6+5=204

Aflăm o parte: $204 : 17 = 12$ **1p**

Primul număr: $12 - 5 = 7$ **1p**

Al doilea număr: $4 \cdot 12 = 48$ **1p**

Al treilea număr: $12 \cdot 12 + 6 = 150$ **1p**