Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Iași

14.02.2014

CLASA a VI-a

Problema 1. Se consideră numerele

$a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1006\cdot 1007}$, $b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+...+\frac{1}{2+4+6+8+...+2012}$

și $c=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{2014^2}$.

a) Calculați numerele a și b.

b) Demonstrați că $c<\frac{1}{2}$.

Problema 2. Notăm cu $S(n)$, suma tuturor divizorilor naturali ai numărului natural n. Un număr natural n se numește **număr perfect** dacă $S(n)=2\cdot n$.

a) Arătați că 6 și 28 sunt **numere perfecte**.

b) Dacă numerele k și 2^k-1 sunt simultan numere prime, demonstrați că numărul $n=2^{k-1}\cdot\left(2^k-1\right)$ este **număr perfect.**

Problema 3. Două unghiuri suplementare au o latură comună, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 60^0. Determinați măsurile unghiurilor.

Gazeta matematică nr.10/2013

Problema 4. Pe dreapta d, se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F, în această ordine, astfel încât $[OA]\equiv[AB]$, B este mijlocul lui $[AC]$, C este mijlocul lui $[AD]$, D este mijlocul lui $[BE]$ și E este mijlocul lui $[CF]$.

a) Arătați că segmentele $[OE]$ și $[CD]$ au același mijloc.

b) Demonstrați că $\frac{AC}{BE}+\frac{BC}{CD}+\frac{AB}{AD}>\frac{BF}{AF}$.

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală, Iaşi

14.02.2014

CLASA a VI-a

BAREM

Problema 1.

a)	Foloseşte $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$	....	**1p**
	Obţine $a=\frac{1006}{1007}$	....	**1p**
	Foloseşte $2+4+6+...+2n=n\cdot(n+1)$	....	**1p**
	Obţine $b=\frac{1006}{1007}$	....	**1p**
b)	Scrie $c=\frac{1}{2^2}\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{1007^2}\right)$	....	**1p**
	Observă că $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{1007^2}<1+a$	....	**1p**
	Finalizare	....	**1p**
		TOTAL PROBLEMA 1	**7p**

Problema 2.

a)	$D_6=\{1,2,3,6\}$, $S(6)=1+2+3+6=12=2\cdot 6$ deci 6 este **număr perfect**	....	**2p**
	$D_{28}=\{1,2,4,7,14,28\}$, $S(28)=1+2+4+7+14+28=56=2\cdot 28$ deci 28 este **număr perfect**	....	**2p**
b)	Divizorii numărului $n=2^{k-1}\cdot(2^k-1)$ sunt $1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad ...\quad 2^{k-1},$ $2^k-1,\quad 2\cdot(2^k-1),\quad 2^2\cdot(2^k-1),\quad 2^3\cdot(2^k-1),\quad ...\quad 2^{k-1}\cdot(2^k-1)$	....	**1p**
	Suma divizorilor numărului n este $S(n)=(1+2+2^2+2^3+...+2^{k-1})+(2^k-1)\cdot(1+2+2^2+2^3+...+2^{k-1})$ $=(1+2+2^2+2^3+...+2^{k-1})\cdot 2^k=(2^k-1)\cdot 2^k$	....	**1p**
	$S(n)=2\cdot 2^{k-1}\cdot(2^k-1)=2\cdot n$, deci n este un **număr perfect**	....	**1p**
	TOTAL PROBLEMA 2		**7p**

Problema 3.

	Unghiurile nu pot fi adiacente	....	2p
	Dacă $2a$ măsura unghiului mai mare și $2b$ măsura unghiului mai mic, $2a+2b=180^0$	....	1p
	Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor este $a-b=60^0$	....	2p
	Obține măsurile unghiurilor de 150^0 și de 30^0	....	2p
	TOTAL PROBLEMA 3		**7p**

Problema 4.

a)	Dacă OA=a, atunci AB=BC=a, CD=$2a$, DE=$3a$, EF=$5a$	....	2p
	Cum OC=DE=3a, rezultă că $[OE]$ și $[CD]$ au același mijloc	....	2p
b)	Calculează $\frac{AC}{BE}=\frac{2a}{6a}=\frac{1}{3}$, $\frac{BC}{CD}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$, $\frac{AB}{AD}=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}$, $\frac{BF}{AF}=\frac{11a}{12a}=\frac{11}{12}$	....	2p
	$\frac{AC}{BE}+\frac{BC}{CD}+\frac{AB}{AD}>\frac{BF}{AF}\Leftrightarrow\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}>\frac{11}{12}\Leftrightarrow\frac{13}{12}>\frac{11}{12}$ adevărat	....	1p
	TOTAL PROBLEMA 4		**7p**