OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016

CLASA A VII-A, SUBIECTE

1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) + 8} \in \mathbb{N}$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

2. Comparaţi numerele *a* şi *b* ştiind că:

$$a = \frac{1}{2015} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2015}\right) \text{ şi } b = \frac{1}{2016} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2016}\right).$$

Daniela Cerchez, Brăila

3. În paralelogramul *ABCD* se consideră $P \in (BC)$. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor *APB, APD* şi *DPC*, atunci demonstraţi că aria triunghiului $G_1G_2G_3$ este a noua parte din aria paralelogramului *ABCD*.

Nicolae Stănică, Brăila

4. Se consideră punctele *A, B, C, D* astfel încât $m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle CBD) = 90^\circ$. Să se arate că:

a) $AB \le CD$;

b) $AB = CD$ dacă şi numai dacă cele patru puncte sunt vârfurile unui dreptunghi.

Dan Negulescu, G.M.

***Notă*: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**
2. Listele cu elevii calificaţi la etapa judeţeană şi baremele vor fi afişate la avizierul unităţilor şcolare şi pe site-ul matematicabr.weebly.com.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016

CLASA A VII-A, SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n) + 8} \in \mathbb{N}$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

Soluţie.

Pentru $n = 1 \Rightarrow \sqrt{10} \notin \mathbb{N}$ 1p

Pentru $n = 2 \Rightarrow \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$ 1p

Pentru $n = 3 \Rightarrow \sqrt{56} \notin \mathbb{N}$ 1p

Pentru $n = 4 \Rightarrow \sqrt{392} \notin \mathbb{N}$ 1p

Pentru $n \geq 5 \Rightarrow U\left(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n) + 8\right) = 8 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n) + 8} \notin \mathbb{N}$ ……………….…3p

2. Comparaţi numerele *a* şi *b* ştiind că:

$$a = \frac{1}{2015} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2015}\right) \text{ şi } b = \frac{1}{2016} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2016}\right).$$

Daniela Cerchez, Brăila

Soluţie.

Fie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2015} = x, x > 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2015} \cdot x$ şi $b = \frac{1}{2016} \cdot \left(x + \frac{1}{2016}\right)$ …………..... 3p

$a - b = \frac{2016x - 2015}{2015 \cdot 2016^2} > 0 \Rightarrow a > b$ ……………………………….…………………………..4p

3. În paralelogramul $ABCD$ se consideră $P \in (BC)$. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor *APB, APD* şi *DPC*, atunci demonstraţi că aria triunghiului $G_1G_2G_3$ este a noua parte din aria paralelogramului *ABCD*.

Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie.

Fie *S, T* mijloacele $[AP],[DP]$ şi $AC \cap BD = \{O\}$

Din *R.T. Thales* $\Rightarrow G_1G_2 \parallel BD \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta G_1SG_2 \sim \Delta BSD \overset{def.}{\Rightarrow} \frac{G_1G_2}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{G_1G_2}{BO} = \frac{2}{3}$ (1) ……......2p

Din *R.T. Thales* $\Rightarrow G_2G_3 \parallel AC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta G_2TG_3 \sim \Delta ATC \overset{def.}{\Rightarrow} \frac{G_2G_3}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{G_2G_3}{OC} = \frac{2}{3}$ (2) ……...2p

$G_1G_2 \parallel BD,\ G_2G_3 \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle G_1G_2G_3 \equiv \sphericalangle BOC\ (3)$ ……………………………………….1p

Din (1), (2) şi (3) $\overset{L.U.L.}{\Rightarrow} \Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta BOC \Rightarrow \Rightarrow \frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{BOC}} = \left(\frac{G_1G_2}{BO}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ………………..…1p

În concluzie, $A_{G_1G_2G_3} = \frac{4}{9} \cdot A_{BOC} = \frac{4}{9} \cdot \frac{A_{ABCD}}{4} = \frac{1}{9} \cdot A_{ABCD}$ ……………………………..……...1p

4. Se consideră punctele *A, B, C, D* astfel încât $m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle CBD) = 90^\circ$. Să se arate că:

a) $AB \le CD$;

b) $AB = CD$ dacă şi numai dacă cele patru puncte sunt vârfurile unui dreptunghi.

Dan Negulescu, G.M.

Soluţie.

a) Fie *M* mijlocul segmentului [*CD*]

Cazul I: $AB \cap CD \ne \varnothing$ ……..…………………………..………………..…..………….… 2p

Dacă $M \in (AB) \Rightarrow AB = AM + BM = \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2} = CD$

Dacă $M \notin (AB) \Rightarrow$ în triunghiul *AMB*: $AB < AM + BM = \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2} = CD$

Cazul II: $AB \cap CD = \varnothing$ ………………………………………….…………..……….…3p

În triunghiul AMB: $AB < AM + BM = \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2} = CD$

b) $AB = CD \Leftrightarrow M \in (AB) \Leftrightarrow ABCD$ dreptunghi……………………………………..2p