INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
21 februarie 2016

Clasa a XI-a

1. a) Se consideră matricea $A = (a_{ij}),\ i,j = \overline{1,4}$, definită astfel:
$a_{ij} = max(i,j)$ oricare ar fi $i,j = \overline{1,4}$. Să se calculeze $\det A$.

b)Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ cu $AB = BA$ și $\det A = \det B = 0$. Să se arate că $\det(A^3 + B^3)$ este sumă a două cuburi de numere întregi.

2. a) Dați exemplu de matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A+B)^{2016} = (A-B)^{2016} = O_2$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{trB} = 0$ și $\det A \cdot \det\mathrm{B} \neq 0$.

b) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A+B)^{2016} = (A-B)^{2016} = O_2$.
Demonstrați că $\operatorname{tr} A = \operatorname{trB} = 0$ sau $\det A = \det\mathrm{B} = 0$.

3. a) Fie $a_1, a_2, ..., a_{2016} \in \mathbb{R},\ a_1 + a_2 + ... + a_{2016} = 0$. Calculați
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1\sqrt{n+a_1} + a_2\sqrt{n+a_2} + ... + a_{2016}\sqrt{n+a_{2016}}\right).$$

b) Demonstrați că există șiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, cu $a_n \in \{-1,1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, astfel încât
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+a_1} + \sqrt{n+a_2} + ... + \sqrt{n+a_n} - n\sqrt{n+a_0}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. a)O funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** periodică și neconstantă, nu are limită la $+\infty$.

b) Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică condițiile:

i) există $\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = a \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x+2) + f(x) = 2f(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluții clasa a XI-a:

1.a) $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -4.$

b)Fie $P(X) = \det(A + XB) = (\det B)X^3 + aX^2 + bX + \det A$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Cum $\det A = \det B = 0$ se obține $P(X) = \det(A + XB) = aX^2 + bX$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Dar

$\det(A^3 + B^3) = \det(A + B)(A + \mathcal{E}B)(A + \mathcal{E}^2 B) =$
$= (\det(A + B)(\det(A + \mathcal{E}B)(\det(A + \mathcal{E}^2 B)) = P(1)P(\mathcal{E})P(\mathcal{E}^2) =$
$= (a + b)(a\mathcal{E}^2 + b\mathcal{E})(a\mathcal{E}^4 + b\mathcal{E}^2) = (a + b)(a\mathcal{E}^2 + b\mathcal{E})(a\mathcal{E} + b\mathcal{E}^2) =$
$= (a + b)(a^2\mathcal{E}^3 + ab(\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}) + b^2\mathcal{E}^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a^3 + b^3)$,
unde $\mathcal{E} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $\mathcal{E}^2 + \mathcal{E} + 1 = 0$, $\mathcal{E}^3 = 1$, adică rădăcina de ordinul 3 a unității.

În concluzie: $\det(A^3 + B^3) = a^3 + b^3, a, b \in \mathbb{Z}$, adică $\det(A^3 + B^3)$ este sumă a două cuburi de numere întregi.

2. a) Luăm de exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Rezultă

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ de unde găsim $(A + B)^2 = O_2$, deci $(A + B)^{2016} = O_2$.

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de unde găsim $(A - B)^2 = O_2$, deci $(A - B)^{2016} = O_2$.

$trA = trB = 0$, $\det A \cdot \det B = -1 \neq 0$.

b) Folosim faptul că dacă $X \in M_2(\mathbb{C}), X^n = O_2, n \geq 2$, atunci $X^2 = O_2$.

($X^n = O_2 \Rightarrow \det X = 0 \Rightarrow X^2 = (trX) \cdot X \Rightarrow X^n = (trX)^{n-1} \cdot X = O_2 \Rightarrow trX = 0$ sau $X = O_2 \Rightarrow X^2 = O_2$.)

Revenim la problemă:

Din $(A + B)^{2016} = O_2$ rezultă $(A + B)^2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = O_2$.

Din $(A - B)^{2016} = O_2$ rezultă $(A - B)^2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 - AB - BA + B^2 = O_2$.

Prin adunare obținem $A^2 + B^2 = O_2$.

Folosind relația Cayley - Hamilton avem: $A^2 = (trA) \cdot A - (\det A) \cdot I_2$ și $B^2 = (trB) \cdot B - (\det B) \cdot I_2$

Obținem: $(trA) \cdot A + (trB) \cdot B = (\det A + \det B) \cdot I_2 .(1)$

Dar $(A + B)^{2016} = O_2$ implică $\det(A + B) = 0$ iar $(A - B)^{2016} = O_2$ implică $\det(A - B) = 0$.

Cum $\det(A + B) + \det(A - B) = 2 \cdot (\det A + \det B)$ obținem $\det A + \det B = 0.(2)$

Din relațiile (1) și (2) obținem că $(trA) \cdot A + (trB) \cdot B = O_2 \Leftrightarrow (trA) \cdot A = -(trB) \cdot B$.

Trecând la determinant avem:

$(trA)^2 \cdot \det A = (trB)^2 \cdot \det B \Leftrightarrow (trA)^2 \cdot \det A = -(trB)^2 \cdot \det A \Leftrightarrow \det A \cdot \left[(trA)^2 + (trB)^2 \right] = 0.$

Dacă $\det A = 0 \Rightarrow \det B = 0$.

Dacă $(trA)^2 + (trB)^2 = 0$, cum $trA, trB \in \mathbb{R}$ rezultă $trA = trB = 0$.

3. a) Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1\sqrt{n+a_1}+a_2\sqrt{n+a_2}+...+a_{2016}\sqrt{n+a_{2016}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_1\sqrt{n+a_1}+a_2\sqrt{n+a_2}+...a_{2015}\sqrt{n+a_{2015}}-a_1\sqrt{n+a_{2016}}-a_2\sqrt{n+a_{2016}}-...-a_{2015}\sqrt{n+a_{2016}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[a_1\left(\sqrt{n+a_1}-\sqrt{n+a_{2016}}\right)+a_2\left(\sqrt{n+a_2}-\sqrt{n+a_{2016}}\right)+...+a_{2015}\left(\sqrt{n+a_{2015}}-\sqrt{n+a_{2016}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_1\cdot\frac{a_1-a_{2016}}{\sqrt{n+a_1}+\sqrt{n+a_{2016}}}+a_2\cdot\frac{a_2-a_{2016}}{\sqrt{n+a_2}+\sqrt{n+a_{2016}}}+...+a_{2015}\cdot\frac{a_{2015}-a_{2016}}{\sqrt{n+a_{2015}}+\sqrt{n+a_{2016}}}\right)=0.$$

b) Notăm $x_n=\sqrt{n+a_1}+\sqrt{n+a_2}+...+\sqrt{n+a_n}-n\sqrt{n+a_0}$ și alegem $a_0=-1$. Pentru fiecare $n\geq 1$, notăm k_n numărul de termeni egali cu +1 din secvența $a_1,a_2,...,a_n$, restul fiind egali cu -1. Obținem că $x_n=k_n\sqrt{n+1}-k_n\sqrt{n-1}=\dfrac{2k_n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$. Rămâne să construim șirul (a_n) astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$. Pentru aceasta alegem $a_n=+1\Leftrightarrow n=(2m)^2, m\in\mathbb{N}^*$. Rezultă $(2k_m)^2\leq n<\left(2(k_m+1)\right)^2$, de unde obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$.

ℕℕ

4. a) Deoarece funcţia f este periodică, atunci există T > 0 astfel încât $f(x+T)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Dar funcția f este neconstantă, deci există $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Definim șirurile $(a_n)_{n\geq 0}, a_n=x_1+nT, \forall n\geq 0$ și $(b_n)_{n\geq 0}, b_n=x_2+nT, \forall n\geq 0$.
Evident $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$. Dar $f(a_n)=f(x_1+nT)=f(x_1)$ și $f(b_n)=f(x_2+nT)=f(x_2)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(x_1)\neq f(x_2)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$, deci funcția f nu are limită la $+\infty$.

b) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x$, atunci se obține $g(x+2)+g(x)=2g(x+1), \forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce implică $g(x+2)-g(x+1)=g(x+1)-g(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Notăm $h(x)=g(x+1)-g(x)$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, atunci $h(x+1)=h(x), \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că funcția *h* este periodică.

Dar ,

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}(g(x+1)-g(x))=\lim_{x\to\infty}\left[\left(f(x+1)-(x+1)\right)-\left(f(x)-x\right)\right]=a-a=0.$$

Conform punctului a) se obține că funcția *h* este constantă și $h(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Atunci $g(x+1)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$, adică și funcția *g* este periodică și are limită la $+\infty$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=a$, atunci funcția *g* este constantă și $g(x)=a, \forall x\in\mathbb{R}$. Deci, $f(x)=x+a, \forall x\in\mathbb{R}$, este funcția căutată.