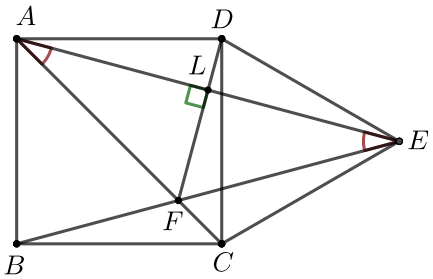
Concursul Interjudeţean de Matematică ,,Teodor Topan", Ediţia a XV-a
Şimleu Silvaniei, 17 decembrie 2022

Clasa a VII-a

1) Fie $ABCD$ un pătrat şi DEC un triunghi echilateral situat în afara pătratului. Dreptele AC şi BE se intersectează în F iar dreptele AE şi DF se intersectează în L. Demonstraţi că $AF = 2LF$.

Liliana Niculescu, Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2022, problema S:E22.230

Soluţie şi barem de corectare



Triunghiurile isoscele DAE şi CBE au unghiurile de la vârf de $150°$, deci unghiurile de la bază măsoară $15°$.

Rezultă că $\angle AEB = 60° - 30° = 30°$. **1p**

Cum măsura unghiului EAC este tot $30°$ $(45° - 15°)$, triunghiul AFE este isoscel cu $FA = FE$. **3p**

Deducem că punctul F aparţine mediatoarei segmentului $[AE]$.

Din egalitatea $DA = DE$ rezultă că şi punctul D aparţine mediatoarei segmentului $[AE]$, deci dreapta DF este mediatoarea segmentului $[AE]$ (patrulaterul $ADEF$ este un deltoid). **2p**

Acum concluzia problemei rezultă imediat din observaţia că triunghiul ALF este dreptunghic cu unghiul A de măsură $30°$. **1p**

2) Spunem că un număr natural pozitiv este ,,foarte simplu" (pe scurt f.s) dacă pentru orice divizor natural d al său numărul $d-1$ nu este compus.

a) Arătaţi că numărul 24 este f.s.

b) Câte elemente are mulţimea numerelor f.s?

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

a) Cei 8 divizori ai numărului 24 sunt $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ şi niciunul dintre numerele $0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 23$ nu este compus (amintim că un număr compus este un număr mai mare decât 1 care are mai mult de doi divizori). **1p**

b) Deoarece 24 este f.s, orice divizor al său este de asemenea f.s. Într-adevăr, dacă d este un divizor al lui 24 atunci orice divizor d_1 al său va fi şi divizor al lui 24, deci $d_1 - 1$ nu este compus.

Rezultă că mulţimea numerelor f.s are cel puţin 8 elemente. **1p**

Vom demonstra că ea are exact 8 elemente, adică este formată doar din divizorii lui 24.

Pentru aceasta observăm mai întâi că un număr f.s n mai mare decât 1 nu poate avea factori primi diferiţi de 2 şi 3, deoarece dacă $p > 3$ este un divizor prim al lui n atunci $p-1$ este un număr par diferit de 2, deci p divide n şi $p-1$ este compus. Prin urmare orice număr f.s este de forma $n = 2^k \cdot 3^\ell$, cu k, ℓ numere naturale. **2p**

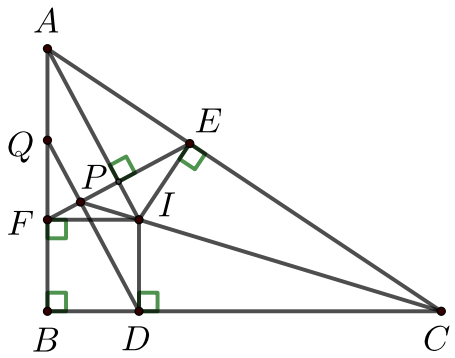
Observăm apoi că exponentul lui 2 din această descompunere nu poate fi mai mare decât 3, pentru că dacă $k \geq 4$ atunci $d = 16$ ar fi un divizor al lui n şi $d - 1 = 15$ este compus.

De asemenea nu putem avea $\ell \geq 2$, pentru că în caz contrar $d = 9$ ar fi un divior al lui n cu $d-1$ număr compus.

Aşadar orice număr f.s este de forma $2^k \cdot 3^\ell$, cu $k \leq 3$, $\ell \leq 1$, adică este un divizor al lui 24. ..... **3p**

3) În triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle B = 90^\circ$ notăm cu I punctul de intersecţie a bisectoarelor interioare, cu D, E, F respectiv proiecţiile punctului I pe laturile BC, AC, AB, cu P intersecţia dreptelor CI şi EF şi cu Q intersecţia dreptelor DP şi AB. Demonstraţi că $AQ = BF$.

Olimpiadă Noua Zeelandă



Soluţie şi barem de corectare

Deoarece punctele de pe bisectoare sunt egal depărtate de laturile unghiului, au loc egalităţile $IF = ID = IE$.

Din $IF = ID$ deducem că $BDIF$ este pătrat (romb cu unghi drept), deci $BD = FI$.

Folosind din nou egalităţile $IF = ID = IE$ deducem că $\triangle AFI \equiv \triangle AEI$ şi $\triangle CEI \equiv \triangle CDI$ (CU) deci $AF = AE$ şi $CE = CD$. **1p**

Din $AF = AE$ şi $[AI$ bisectoare rezultă că $AI \perp EF$, iar din $CE = CD$ şi $[CP$ bisectoare că $\triangle CEP \equiv \triangle CDP$ (LUL), deci $\angle CEP \equiv \angle CDP$. **2p**

Rezultă că $\angle AEF \equiv \angle QDB$, deci $\angle EAI \equiv \angle DQB$ (complemente de unghiuri congruente). **2p**

Triunghiurile dreptunghice AFI şi QBD sunt aşadar congruente (CU), deci $AF = QB$ şi scăzând din ambii membri QF obţinem concluzia problemei. **2p**

Altă soluţie

Deoarece $AQ \| ID$ (ambele sunt perpendiculare pe BC) şi $BF = ID$ ($FBDI$ este pătrat), dacă concluzia ar fi adevărată atunci $AQDI$ ar fi paralelogram, pentru că ar avea două laturi opuse paralele şi congruente. Evident este adevărată si proprietatea reciprocă: dacă $AQDI$ este paralelogram, atunci $AF = BF$ ($=ID$). Aşadar este suficient să arătăm că $AI \| DQ$. **1p**

Remarcăm că punctele E, F, D sunt punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile triunghiului, iar I este centrul acestui cerc.

Din egalităţile $AF = AE$ şi $IF = IE$ rezultă că AI este mediatoarea segmentului $[EF]$, deci $AI \perp EF$. Va fi deci suficient să arătăm că $QD \perp FE$. **1p**

Din egalităţile $ID = IE$ şi $CD = CE$ rezultă că dreapta CI este mediatoarea segmentului $[DE]$ şi cum $P \in CI$, are loc egalitatea $PD = PE$. **2p**

În plus $\angle PED = \frac{1}{2}\angle FID = 45^\circ$ ($\angle PED$ este unghi înscris, iar $\angle FID$ este unghi la centru în cercul înscris în triunghiul ABC). **2p**

Prin urmare triunghiul PED este dreptunghic isoscel, deci $PD \perp PE$, adică $QD \perp FE$, ceea ce trebuia demonstrat. **1p**

4) a) Aflaţi cel mai mic număr natural k ($k \geq 2$) pentru care există k numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_k$ astfel încât

$$\frac{(a_1 - k) \cdot (a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_k - 2)}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} = 2021.$$

b) Există numere naturale $k \geq 2$ şi numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_k$ astfel încât valoarea raportului

$$\frac{(a_1 - k) \cdot (a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_k - 2)}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$$

să fie 2022? (Factorii de la numărător, cu excepţia primului, sunt de forma $(a - 2)$.)

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

a) Din egalitatea $(a_1 - k) \cdot (a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_k - 2) = 2021 a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ rezultă

$$|(a_1 - k) \cdot (a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_k - 2)| = |2021 a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k|,$$

adică

$$|a_1 - k| \cdot |a_2 - 2| \cdot \ldots \cdot |a_k - 2| = 2021 a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k.$$

Deoarece pentru $a = 1$ sau $a > 2$ are loc inegalitatea $|a - 2| \leq a$ cu egalitate pentru $a = 1$, deducem că $|a_1 - k| \geq 2021 a_1$. **2p**

Din această inegalitate obţinem $k - a_1 \geq 2021 a_1$, adică $k \geq 2022 a_1$ (inegalitatea $a_1 - k \geq 2021 a_1$ este imposibilă).

Aşadar k este cel puţin 2022. ..... **2p**

Pe de altă parte, cum $(1-2022)(1-2) \cdot \ldots \cdot (1-2) = -2021 \cdot (-1)^{2021} = 2021 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$, cel mai mic număr k cu proprietatea din enunţ este 2022. ..... **1p**

b) Răspunsul este afirmativ. Un exemplu de numere naturale $k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ astfel încât

$$(a_1 - k) \cdot (a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_k - 2) = 2022 a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$$

este: $k = 4045, a_1 = 1, a_2 = 4$ şi $a_3 = a_4 = \ldots = a_{4045} = 1$ (în acest caz membrul stâng este $(-4044) \cdot 2 \cdot (-1)^{4043} = 4044 \cdot 2$, iar cel drept $2022 \cdot 4$). **2p**