MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2015. február 28.

IX . OSZTÁLY

1.) Ha $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ igazold az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$

b) $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\dfrac{1}{abc}$

2.) Ha $y_n=\dfrac{5}{1\cdot2}+\dfrac{9}{2\cdot3}+\dfrac{15}{3\cdot4}+...+\dfrac{n^2-n+3}{(n-1)\cdot n},n\in\mathbb{N},n\geq2$, határozd meg $[y_n]$ és $\{y_n\}$ értékét $n\geq4$ esetben!

3.) Adott az ABC háromszög, amelyben $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$, és az $M\in BC$, $N\in AC$, $P\in AB$ pontok úgy, hogy $(BM)\equiv(MC)$, $ABN\sphericalangle\equiv CBN\sphericalangle$, $AM\cap BN=\{S\}$, $CS\cap AB=\{P\}$. Számítsd ki az SNP és SBC háromszögek területeinek arányát!

4.) Legyen $(a_n)_{n\geq1}$ egy sorozat úgy, hogy : $\dfrac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}=\dfrac{a_{n+1}}{3}$. Ha $b_n=\dfrac{a_n}{n}$ igazold, hogy $(b_n)_{n\geq1}$ számtani haladvány!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015
BAREM
CLASA A IX-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$a^3+b^3\geq a^2b+ab^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\geq 0$ adevărat pentru $\forall\, a,b,c\in R_+^*$	**3p**
b)	Din **a)** rezultă că $a^3+b^3+abc\geq ab(a+b+c)$ În mod analog: $b^3+c^3+abc\geq bc(a+b+c)$, $c^3+a^3+abc\geq ca(a+b+c)$.	**3p**
	De unde avem $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq$ $\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$.	**3p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Avem: $\frac{n^2-n+3}{(n-1)n}=\frac{n^2-n}{(n-1)n}+3\frac{1}{(n-1)n}=1+3\frac{1}{(n-1)n}=1+3\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$	**3p**
	De unde $y_n=n-1+3\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=n-1+3\left(1-\frac{1}{n}\right)=n+2-\frac{3}{n}=n+1+\frac{n-3}{n}$	**4p**
	Pentru $n\geq 4$ avem $\left[\frac{n-3}{n}\right]=0$ de unde rezultă $[y_n]=n+1$ și $\{y_n\}=y_n-[y_n]=\frac{n-3}{n}$	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	$AM\cap BN\cap CP=\{S\}$, conform teoremei lui Ceva $\frac{NA}{NC}\cdot\frac{MC}{MB}\cdot\frac{PB}{PA}=1$.	**2p**
	Însă $\frac{MB}{MC}=1$, rezultă că $\frac{NA}{NC}=\frac{PA}{PB}$ de unde obținem $PN\parallel BC$	**2p**
	$\sphericalangle ABN\equiv\sphericalangle CBN\Rightarrow BN$ bisectoare $\Rightarrow\frac{NA}{NC}=\frac{BA}{BC}=\frac{2}{3}$. Din $\frac{NA}{NC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{NA}{AC}=\frac{2}{5}$	
	Din $PN\parallel BC\Rightarrow APN_\Delta\sim ABC_\Delta$ de unde $\frac{PN}{BC}=\frac{AN}{AC}=\frac{2}{5}$	**2p**
	Din $PN\parallel BC\Rightarrow SNP_\Delta\sim SBC_\Delta$, deci $\frac{A_{SNP}}{A_{SBC}}=\left(\frac{PN}{BC}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$.	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	$a_2=3a_1=\frac{2\cdot 3}{2}a_1$	**2p**
	$a_3=\frac{3\cdot 4}{2}a_1$	**2p**
	Se demonstrază cu inducţie că $a_n=\frac{n(n+1)}{2}a_1$ de unde rezultă că $b_n=\frac{n+1}{2}a_1$	**4p**
	Cum $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}a_1$ rezultă că $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu raţia $\frac{1}{2}a_1$	**1p**