OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a IX-a

1.Pentru $x, y \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că $2x + y = 10$ se consideră expresia:

$$E(x,y) = \frac{[x+y]+[x+2y]+\cdots+[x+404y]}{404},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a . Arătați că:

$$[404(x+y) - E(x,y)] = 2015.$$

2.Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n^2 - 89n + 2011} \in \mathbb{N}$.

3.Să se determine o progresie aritmetică în care suma primilor n termeni este egală cu $3n^2 + 4n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.Unii termeni ai progresiei sunt pătrate perfecte. Să se determine o expresie generală a acestor termeni și să se calculeze primii 6 termeni.

4.Fie patrulaterul $ABCD$, H_1 ortocentrul triunghiului ABC și H_2 ortocentrul triunghiului DBC. Demonstrați că $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă $H_1H_2 \parallel AD$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu)
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a IX-a:

1. Din definiția părții întregi avem:

$$x+y-1<[x+y]\le x+y\ ,\dots,x+404y-1<[x+404y]\le x+404y\ .$$

Adunăm membru cu membru inegalitățile de mai sus și obținem:

$$404x+202\cdot 405y-404<404\cdot E(x,y)\le 404x+202\cdot 405y\ .$$

Atunci: $-x-\frac{405y}{2}\le -E(x,y)<-x-\frac{405y}{2}+1$. Rezultă:

$$403x+\frac{403y}{2}\le 404(x+y)-E(x,y)<403x+\frac{403y}{2}+1$$

și ținând cont că $2x+y=10$, obținem:

$$2015\le 404(x+y)-E(x,y)<2016.$$

Din inegalitățile de mai sus, rezultă: $[404(x+y)-E(x,y)]=2015$.

2. Dacă $\sqrt{n^2-89n+2011}\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ \exists\ k\epsilon\mathbb{N}$ astfel încât

$$\sqrt{n^2-89n+2011}=k\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2-89n+2011=k^2\ \Rightarrow\ 4n^2-4\cdot 89n+8044=4k^2\ \Rightarrow$$

$(2n-89)^2+123=4k^2\ \Rightarrow\ (2k-2n+89)(2k+2n-89)=123.$

Distingem următoarele cazuri :

Cazul I : $\begin{cases}2k-2n+89=1\\2k+2n-89=123\end{cases}$

$\Rightarrow k=31$ și $n=75$;

Cazul II: $\begin{cases}2k-2n+89=123\\2k+2n-89=1\end{cases}$

$\Rightarrow k=31$ și $n=14$;

Cazul III: $\begin{cases}2k-2n+89=3\\2k+2n-89=41\end{cases}$

$\Rightarrow k=11$ și $n=54$;

Cazul IV: $\begin{cases}2k-2n+89=41\\2k+2n-89=3\end{cases}$

$\Rightarrow k=11$ și $n=35$

Deci valorile lui n căutate sunt 14, 35, 54, 75.

3. $S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)r]=3n^2+4n$;   (1)

$(r-6)n+2a_1-r-8=0$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$. (2)

De aici rezultă că $r=6$ și $a_1=7$.

Termenul general al șirului este de forma $a_n=6n+1$. Primii șase termeni ai șirului sunt 7, 13, 19, 25, 31, 37.

Observăm că toți termenii progresiei sunt numere impare. Condiția ca unii termeni ai progresiei să fie pătrate perfecte se scrie:

$6n+1=(2k+1)^2$, de unde $3n=2k(k+1)$.   (3)

Cum numerele k și $(k+1)$ sunt prime între ele, relația (3) are loc dacă $k = 3p$, de unde $n = 2p(3p + 1)$, sau $k + 1 = 3p$, adică $n = 2p\left(3p - 1\right)$, $p \geq 1$.

Soluția problemei este deci $n = 2p(3p \pm 1), p \in \mathbb{N}^*$.

4.Fie O_1 , O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, DBC.
$AH_1 \perp BC$ și $DH_2 \perp BC \Longrightarrow AH_1 \parallel DH_2$.
Ținând cont de aceasta, $H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow AH_1H_2D$ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{H_1H_2}$.
$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{r_{H_2}} - \overrightarrow{r_{H_1}}$;
H_2 ortocentrul triunghiului BCD atunci:
$\overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{O_2B} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2D}$ (Relația lui Sylvester),
$\overrightarrow{r_{H_2}} - \overrightarrow{r_{O_2}} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_{O_2}} + \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_{O_2}} + \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_{O_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{r_{H_2}} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} - 2\overrightarrow{r_{O_2}}$
Analog: $\overrightarrow{r_{H_1}} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A} - 2\overrightarrow{r_{O_1}}$.
Deci, $H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} - 2\overrightarrow{r_{O_2}} - \left(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A} - 2\overrightarrow{r_{O_1}}\right) =$
$= \overrightarrow{AD} - 2\left(\overrightarrow{r_{O_2}} - \overrightarrow{r_{O_1}}\right) \Longrightarrow O_2 = O_1 \Longrightarrow ABCD$ inscriptibil.

Barem de corectare

Clasa a IX-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
$x+y-1<[x+y]\le x+y,\dots,x+404y-1<[x+404y]\le x+404y$.	2p
$404x+202\cdot 405y-404<404\cdot E(x,y)\le$ $\le 404x+202\cdot 405y$	2p
$-x-\frac{405y}{2}\le -E(x,y)<-x-\frac{405y}{2}+1$	1p
$403x+\frac{403y}{2}\le 404(x+y)-E(x,y)<403x+\frac{403y}{2}+1$	1p
$2015\le 404(x+y)-E(x,y)<2016$	2p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
$\exists\ k\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n^2-89n+2011}=k$	2p
$4n^2-4\cdot 89n+8044=4k^2$	1p
$(2k-2n+89)(2k+2n-89)=123$	1p
Cazul I	1p
Cazul II	1p
Cazul III	1p
Cazul IV	1p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)r]=3n^2+4n$	2p
$(r-6)n+2a_1-r-8=0$	1p
$r=6$ și $a_1=7$	1p
$a_n=6n+1$	1p
7, 13, 19, 25, 31, 37	1p
Condiția $6n+1=(2k+1)^2$	1p
Finalizare	2p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
$AH_1 \perp BC$ și $DH_2 \perp BC \Rightarrow AH_1 \parallel DH_2$	1p
$H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow AH_1H_2D$ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{H_1H_2}$.	1p
$\overrightarrow{r_{H_2}} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} - 2\overrightarrow{r_{O_2}}$	3p
$H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - 2\left(\overrightarrow{r_{O_2}} - \overrightarrow{r_{O_1}}\right)$	2p
Finalizare	2p
TOTAL	**10p**