

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală – 16.02.2013

CLASA a VII-a

1. a) Dacă  $a$  și  $b$  sunt două numere întregi, determinați mulțimea  $A = \{a^b \mid ab - 1 = a + b\}$ .

b) Există  $n \in \mathbb{Z}$  pentru care numerele  $\frac{3n+1}{4}$  și  $\frac{5n-3}{4}$  să fie simultan întregi?

Vasile Chiș, Reșița

2. Demonstrați că  $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n+2}{n \cdot (n+1)} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) < 2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

RMCS nr. 29/2009

3. În paralelogramul ABCD considerăm punctele M și P, mijloacele segmentelor  $[AB]$  și respectiv  $[BC]$ .

a) Dacă punctul E este simetricul lui D față de punctul P, arătați că punctele A, B, E sunt coliniare.

b) Dacă aria triunghiului BMP este de  $24 \text{ cm}^2$ , calculați aria patrulaterului cu vârfurile în punctele A, C, D, P.

Vasile Chiș, Reșița

4. Se consideră trapezul isoscel ABCD în care  $AB \parallel CD$  și  $AB = 2 \cdot CD$ . Se notează cu M și N mijloacele bazei mari, respectiv bazei mici, iar P un punct pe segmentul  $(MN)$  pentru care  $\angle BPM \equiv \angle ABC$ . Să se arate că dreapta AP este perpendiculară pe DM.

RMCS nr. 25/2008

## BAREM cl. a VII.a

1. a) Din relația dată obținem  $b = \frac{a+1}{a-1} \in \mathbb{Z}$  .....1p  
 deducem că  $a-1 \mid a+1$  și cum  $a-1 \mid a-1$  obținem că  $a-1 \mid 2$  .....1p  
 Din  $a-1 \in D_2 \Rightarrow a-1 \in \{\pm 1, \pm 2\}$  și se obțin soluțiile  $(2, 3), (0, -1), (3, 2), (-1, 0)$  ..... 1p  
 Soluția  $(0, -1)$  nu convine. Finalizare  $A = \{1, 8, 9\}$  .....1p
- b) Presupunem că cele două numere ar fi simultan întregi. Obținem:  
 $\frac{3n+1}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \mid 3n+1 \Rightarrow 4 \mid 5(3n+1) \Rightarrow 4 \mid 15n+5$  .....1p  
 și  $\frac{5n-3}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \mid 5n-3 \Rightarrow 4 \mid 3(5n-3) \Rightarrow 4 \mid 15n-9$  .....1p  
 Prin urmare:  $4 \mid (15n+5) - (15n-9)$  și deci  $4 \mid 14$  - absurd .....1p
2. Relația dată se scrie:  
 $3\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + (n+2)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right)$  .....2p  
 $\frac{3}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} + \dots + \frac{n+2}{n} - \frac{n+2}{n+1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right)$  .....1p
- Făcând calculele obținem:  
 $\frac{3}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{3}{1} - \frac{n+2}{n+1}$  .....1p  
 și în final  $\frac{2n+1}{n+1}$  .....1p
- Dar  $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+2-1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$  .....1p  
 Finalizare .....1p
3. a)  $\triangle BEP \equiv \triangle CDP \Rightarrow \angle BEP \equiv \angle CDP \Rightarrow EB \parallel CD$  .....2p  
 Din  $AB \parallel CD$  (folosind axioma paralelelor) se obține coliniaritatea .....1p
- b) Ducem  $MS \perp BC$  și  $AT \perp BC \Rightarrow MS$  linie mijlocie în  $\triangle ABT$  .....1p  
 Notăm  $BP = a$  și  $MS = h \Rightarrow A_{MBP} = \frac{a \cdot h}{2}$  .....1p  
 $ADCP$  trapez  $\Rightarrow A_{ADCP} = \frac{PC + AD}{2}$  .....1p  
 $A_{ADCP} = \frac{(a + 2a) \cdot AT}{2} = \frac{3a \cdot 2h}{2} = 6 \cdot \frac{ah}{2} = 6 \cdot 24 = 144 \text{ cm}^2$   
 .....1p
4. MN mediatoarea segmentului  $[AB]$  .....1p  
 $[PA] \equiv [PB] \Rightarrow \triangle PAB$  isoscel  $\Rightarrow \angle PAM \equiv \angle PBM$  .....1p

$\triangle PMB$  dreptunghic,  $m(\sphericalangle PBM) + m(\sphericalangle BPM) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle PAM) + m(\sphericalangle MBC) = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \triangle ABE$  dreptunghic,  $m(\sphericalangle AEB) = 90^\circ$  .....2p  
 BCDM paralelogram  $\Rightarrow BC \parallel DM$  .....2p  
 Finalizare .....1p