INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

- ETAPA LOCALĂ, 16.02.2013 –

CLASA A IX-A

Subiecte

1. a. Arătaţi că pentru oricare numere reale a,b strict pozitive are loc inegalitatea :

$$\frac{ab-1+\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}}{a+b}\le\frac{a+b}{2}\quad .$$

b. Dacă x,y,z sunt numere reale strict pozitive şi $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$ arătaţi că:

$$\frac{\sqrt{z(x+1)(y+1)}}{1-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x(y+1)(z+1)}}{1-\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{y(z+1)(x+1)}}{1-\sqrt{zx}}\le 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$$

Prof. Gabriel Necula, Breaza

2. Fie $a\in\left(0;\frac{3}{4}\right]$. Demonstraţi că $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n-a}\right]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Prof. Cezar Stoica, Ploieşti

3. Fie A'∈(BC),B'∈(AC),C'∈(AB) punctele de tangenţă ale cercului înscris in triunghiul ABC cu laturile sale.
   a. Arătaţi că AA',BB',CC' sunt concurente.
   b. Arătaţi că dacă punctul M verifică egalitatea $a\cdot\overrightarrow{MA'}+b\cdot\overrightarrow{MB'}+c\cdot\overrightarrow{MC'}=\overrightarrow{0}$,atunci M este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Prof. Vasile Stănescu, Ploieşti

4. Se consideră punctele A,B,C,D,E astfel încât $\overrightarrow{DC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{k-1}\cdot\overrightarrow{DE}$, $C\notin AB$, $k\in\mathbb{R}$, $k>1$. Fie $AC\cap BE=\{O\}$ şi $[AT$ bisectoarea unghiului DAE, $T\in DE$. Dacă $\overrightarrow{OT}$ şi $\overrightarrow{BD}$ sunt coliniari, demonstraţi că $AD=BC$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolşvările complete. Timp de lucru: 3 ore.