**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**Etapa locală – 9 februarie 2013**
**Barem, clasa a XI– a**

**1.** Fie $A$ şi $B$ două matrice pătratice de ordinul doi cu elemente complexe cu proprietatea că $AB - BA = A$. Să se arate că $AB^n A = O_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

*G.M. 11/2012*

***Soluţie:*** Din $AB - BA = A$ obţinem $tr(A) = 0$ şi $A^2 = -\Delta \cdot I_2$, unde $\Delta = \det(A)$. ................................ 1 p

$AB - BA = A \Rightarrow ABA - BA^2 = A^2$, deci $ABA = BA^2 + A^2 = -\Delta \cdot B - \Delta \cdot I_2$.

$AB - BA = A \Rightarrow A^2B - ABA = A^2$, deci $ABA = A^2B - A^2 = -\Delta \cdot B + \Delta \cdot I_2$.

Aşadar $\Delta = 0$, deci $A^2 = O_2 = ABA$. ............................................................................................. 2 p

Afirmaţia se demonstrează prin inducţie după $n$.

Am demonstrat că $AB^1A = O_2$ deci $P(1)$ e o propoziţie adevărată.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că $AB^kA = O_2$ şi demonstrăm că $AB^{k+1}A = O_2$. ........................................ 1 p

$AB - BA = A \,\Big|\cdot B^k \quad \Rightarrow \quad AB^{k+1} - BAB^k = AB^k \Big| \cdot A, \quad \Rightarrow \quad AB^{k+1}A - BAB^kA = AB^kA$ ................................ 2 p

$\overset{ip\ ind}{\Leftrightarrow} AB^{k+1}A - B\left(\underbrace{AB^kA}_{O_2}\right) = O_2 \Leftrightarrow AB^{k+1}A = O_2$ şi din primul principiu de inducţie rezultă concluzia ................ 1 p

**2. a)** Să se găsească un exemplu de matrice distincte $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât

$$\det(A) = \det(B) = \det(C) = -1 \quad \text{şi} \quad \det(A+B) > \det(B+C).$$

**b)** Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = \det(B) = \det(C)$ şi $\det(A+B) > \det(B+C)$

Dacă $\det(A + i \cdot B) = \det(B + i \cdot C)$, să se demonstreze că

$$\det\left(A + \sqrt{3}B\right) + \det\left(B + \sqrt{2}C\right) > \det\left(A + \sqrt{2}B\right) + \det\left(B + \sqrt{3}C\right).$$

*Dana Heuberger*

***Soluţie:*** **a)** De exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\det(A+B) = 0 > -8 = \det(B+C)$. Orice exemplu corect ................................................ 3 p

**b)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A + x \cdot B) - \det(B + x \cdot C) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \det(x \cdot A + B) - \det(x \cdot B + C) = ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$. ........................................ 1 p

Avem $a = g(0) = \det(B) - \det(C) = 0$ şi $e = f(0) = \det(A) - \det(B) = 0$

deci $f(x) = bx^3 + cx^2 + dx$. ................................................................................................................ 1 p

Din ipoteză, $f(i) = \det(A + i \cdot B) - \det(B + i \cdot C) = 0$, deci $b \cdot i^3 + c \cdot i^2 + d \cdot i = 0$

adică $-b \cdot i - c + d \cdot i = 0$, de unde rezultă $b = d$ şi $c = 0$. Obţinem $f(x) = b \cdot (x^3 + x)$ ............................ 1 p

Din ipoteză avem $f(1) = \det(A+B) - \det(B+C) = 2b > 0$, deci funcţia $f$ e strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Rezultă că $f\left(\sqrt{3}\right) > f\left(\sqrt{2}\right)$, adică $\det\left(A + \sqrt{3}B\right) + \det\left(B + \sqrt{2}C\right) > \det\left(A + \sqrt{2}B\right) + \det\left(B + \sqrt{3}C\right)$ ............... 1 p

**3.** Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$, cu $x_1=\dfrac{24}{5}$, astfel încât $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ 5x_{n+1}=13x_n+12\sqrt{x_n^2+4}$.

**a)** Să se demonstreze că $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\quad x_n=5^n-5^{-n}$.

**b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2}$.

*Cristina Ocean*

**Indicaţie: a)** Demonstraţia prin inducţie ........................................ 4 p

**b)** $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{5^{2n}}\right)^{5^{2n}-2+5^{-2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{2n}-2+5^{-2n}}{-5^{2n}}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$ ........................................ 3 p

**4.** Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$, cu $x_0\in\left(0,\infty\right)$, astfel încât $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \left(x_{n+1}-x_n\right)\left(x_n+1\right)=1$.

**a)** Să se arate că şirul este crescător.

**b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

***Indicaţie:*** **a)** Demonstraţia prin inducţie a faptului că $\forall\ n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}>x_n>0$ ........................................ 2 p

**b)** Deoarece şirul e crescător, există $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. ........................................ 1 p

Dacă am avea că $\ell\in\mathbb{R}$, trecând la limită în relaţia de recurenţă din enunţ am obţine $\left(\ell-\ell\right)\left(\ell+1\right)=1$, fals.

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. ........................................ 1 p

**c)** Din ipoteză obţinem $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n+1}$ deci $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1+\dfrac{1}{x_n\cdot\left(x_n+1\right)}\to 1$ ........................................ 1 p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n}\overset{C-S}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{\left(n+1\right)-n}=\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)\left(x_{n+1}+x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}+x_n}{1+x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}+1}{\dfrac{1}{x_n}+1}=2$$ ........................................ 1 p

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$ ........................................ 1 p

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
## Etapa locală – 9 februarie 2013

## CLASA a XI– a

**1.** Fie $A$ şi $B$ două matrice pătratice de ordinul doi cu elemente complexe cu proprietatea că $AB - BA = A$. Să se arate că $AB^n A = O_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

*G.M. 11/2012*

**2. a)** Să se găsească un exemplu de matrice distincte $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $\det(A) = \det(B) = \det(C) = -1$ şi $\det(A+B) > \det(B+C)$.

**b)** Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = \det(B) = \det(C)$ şi $\det(A+B) > \det(B+C)$. Dacă $\det(A + i \cdot B) = \det(B + i \cdot C)$, să se demonstreze că $\det\left(A + \sqrt{3}B\right) + \det\left(B + \sqrt{2}C\right) > \det\left(A + \sqrt{2}B\right) + \det\left(B + \sqrt{3}C\right)$.

*Dana Heuberger*

**3.** Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, cu $x_1 = \dfrac{24}{5}$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$5x_{n+1} = 13x_n + 12\sqrt{x_n^2 + 4}\ .$$

**a)** Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 5^n - 5^{-n}$.

**b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2}$.

*Cristina Ocean*

**4.** Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 0}$, cu $x_0 \in (0, \infty)$, astfel încât

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (x_{n+1} - x_n)(x_n + 1) = 1.$$

**a)** Să se arate că şirul este crescător.

**b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

**c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

**Notă:**
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de:
prof. Gabriela Boroica, Colegiul Naţional „Vasile Lucaciu”, Baia Mare
prof. Dana Heuberger, Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai”, Baia Mare

## SUCCES!